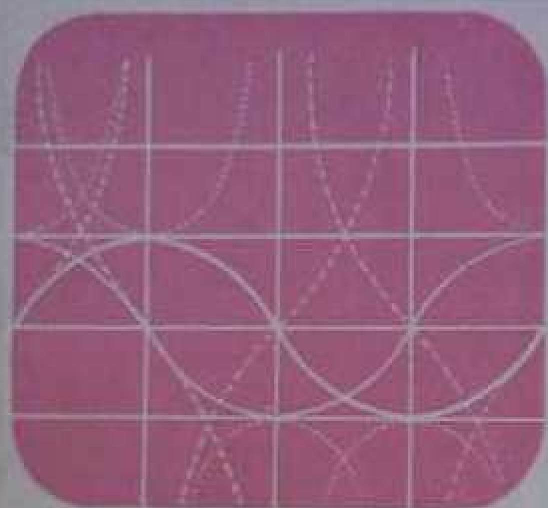


张锦文

集合论与连续统假设浅说

上海教育出版社

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

集合论与连续统假设浅说

张 锦 文

上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）
新华书店上海发行所发行　江苏启东印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 3　字数 63,000
1980 年 6 月第 1 版　1980 年 6 月第 1 次印刷
印数 1—50,000 本

统一书号：7150·2258　　定价：0.23 元

前　　言

连续统假设是现代数学中的一大难题，它是1882年集合论的创始者康托尔（Cantor, G.）提出并宣布证明的问题（后来发现他的证明有错误，未发表）．1900年，希尔伯脱（Hilbert, D.）在他的著名演讲中列举了二十三个未解决的数学问题，第一个就是连续统假设．1938年，哥德尔（Gödel, K）证明ZFC公理系统推不出连续统假设的否定式，亦即连续统假设与ZFC是相对协调的；1963年，科恩（Cohen, P. J.）证明ZFC推不出连续统假设，亦即连续统假设与ZFC是相对独立的．综合哥德尔和科恩的结果，就是连续统假设在ZFC中是不可判定的．正如尺规不能三等分任意角一样，ZFC也不能断定连续统假设成立与否．要三等分任意角需要新工具，要断定连续统假设也同样要新工具，也就是说，要寻求新的更强有力的并且从数学的理论与实践上来说有资格作新公理的数学命题或者采用其它有效的途径去攻克连续统问题，它现在仍然是一大难题．虽然，一百年来，许多数学家为解决它而付出了不懈的努力，也取得了一些重大进展，而且为了解决它也找到一些著名的方法，这些方法对解决其它数学问题起了积极的作用．

直观地讲，连续统问题就是实数有多少的问题，或者说，一条直线上点有多少的问题，实数的个数与自然数的个数的关系问题．但是，对于无穷集合（如象自然数集合，实数集合），元素的个数如何精确地刻划呢？回答这些问题要涉及函数、关系、集合等基本问题。本书从集合的例子和概念入手，直观地讨论了朴素集合论或康托尔集合论的基本原则（外延

原则，概括原则和选择原则)、基本运算(并、交、幂)，基本概念(关系、函数、一一对应、对等、序数、基数)、基本定理(康托尔定理、蔻尼定理)，并且引导出朴素集合论中的著名悖论(罗素悖论，康托尔悖论)，从而说明必须对集合论进行公理化处理，并介绍了著名的集合论公理系统——蔡梅罗-弗兰克尔系统(ZF 系统). 在这个基础上，我们介绍了哥德尔、科恩的工作，并介绍了他们的方法.

本书的主要目的是精确地陈述连续统假设和介绍它的进展，因此，对一些相关领域(如关系、函数、序数等)，并未展开讨论，只对这些领域给出了一个清晰的符合现代术语的概念. 因此，本书也对现代数学的一个领域——集合论作了一些通俗的介绍，并且也涉及一些有趣味的逻辑问题. 集合的观念、逻辑的训练，都是很有意味，发人深省的，同时本书又是以连续统问题为主线，这样又增加了读者的兴趣. 希尔伯脱说得好："某类问题对于一般数学进展的深远意义以及它们在研究者个人的工作中所起的重要作用是不可否认的. 只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止. 正如人类的每项事业都追求确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题. 正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁般的意志和力量，发现新方法和新观点，达到更为广阔和自由的境界."(希尔伯脱，1900年在国际数学大会上的演讲:《数学问题》)连续统问题已经经历了近一百年了，虽然还没有解决，但是，我们相信，人类终归要解决它的，在解决它的过程中必将发现新方法和新观点，使人类达到更广阔更自由的境界.

限于作者水平，错误之处在所难免，欢迎批评指正.

作　者

1979年6月20日

目　录

前言
一、集合及其运算……1
1. 集合和有关表示法……1
2. 外延原则……3
3. 子集合……4
4. 概括原则……6
5. 空集合、单元集合和无序对集合……8
6. 集合的并、交和相对补……9
7. 幂集合……14
二、关系、函数、一一对应……17
1. 有穷集合与无穷集合……18
2. 伽利略问题……19
3. 有序对……20
4. 笛卡尔乘积……21
5. 关系……22
6. 函数……25
7. 两个集合之间的一一对应……28
8. 选择公理……29
三、序数与基数……31
1. 自然数……32
2. 序数……34
3. 基数……37
4. 集合的基数……39
四、可数集合与不可数集合……42

1. 一些可数集合 ……………………………………42
2. 有理数集合 Q 也是可数的 ……………………………43
3. 可数集合的一些主要性质 ……………………………45
4. 康托尔定理 ……………………………………48
五、康托尔猜想……………………………………51
1. $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$ ……………………………………52
2. 连续统假设 ……………………………………52
3. $\overline{\overline{R}}=\overline{\overline{P(N)}}$，亦即 $\aleph=2^{\aleph_0}$……………………………53
4. CH 的另一种陈述……………………………………54
六、集合论悖论……………………………………57
1. 理发师的悖论 ……………………………………58
2. 罗素悖论 ……………………………………58
3. 康托尔悖论 ……………………………………59
七、集合论的 ZF 公理系统 ……………………………61
1. ZF 的形式语言……………………………………62
2. 一阶谓词演算的公理系统和推理规则 ……………………63
3. ZF 的公理系统……………………………………65
4. 关于 ZFC 的定理和协调性问题……………………………69
八、连续统假设对 ZFC 的相对协调性结果 ………………72
1. 关于 CH 的基本结果 ……………………………72
2. 哥德尔的主要方法 ……………………………………73
3. 八个基本运算 ……………………………………74
4. 序数的配对函数和 L 的构造……………………………75
九、连续统假设相对 ZFC 的独立性结果 ………………79
1. 共尾序数与蔻尼定理 ……………………………80
2. 蔻尼定理的结论 ……………………………………82
3. 科恩的结果是如何实现的 ……………………………83
4. ZF 系统的不完全性……………………………………85
5. 连续统问题还是一大难题 ……………………………86

一、集合及其运算

1. 集合和有关表示法

每个人都知道许多集合，这就是把人们的直观上或思想上的那些确定的能够区分的对象汇集在一起成为一个整体，这一整体就叫做一个集合.

[例 1] 甲班的全体学生组成一个集合.

我们可以把这一集合记做 S_1，如果张三是甲班的一个学生，我们就说张三是集合 S_1 的一个元素，并记做"张三 $\in S_1$"，其中符号"$\in$"表示"属于"或"元素关系". 因此，"张三 $\in S_1$"可以读做"张三属于 S_1"，或"张三是 S_1 的一个元素"，也就是"张三是甲班的一个学生". 如果李四不是甲班的一个学生，我们就记做："李四 $\notin S_1$"，意思是指："李四不是 S_1 的一个元素". 而"王五 $\in S_1$"表示"王五是 S_1 的一个元素".

[例 2] 这一黑板上写了而且只写了：2, 3, 7, 8 这样几个数字，我们把这些数字组成的集合记做 S_2.

这时，有：$2\in S_2$, $3\in S_2$, $4\notin S_2$, $5\notin S_2$, 等等.

在例 1 中，我们把甲班的学生汇集成一个集合 S_1，为什么能够这样汇集呢？因为"一个学生是否在甲班"这是确定的，张三是甲班的学生，李四不是甲班的学生，这些都已确定，不会含混. 同时，甲班的若干个学生相互都是能够区别的，虽然，张三、王五都是甲班的学生，但这是两个不同的学生，这些都是我们的常识所知道的.

又，比如甲班的女生可以组成一个集合，甲班的男生同样也可以组成一个集合，因为这些对象都是“确定的，能够区分的”．但是，“甲班的高个子”就不能组成一个集合，这是因为，什么叫“高个子”？这是一个不确定的、不清晰的概念．身高一米八的是高个子，身高一米七的、一米六八的算不算高个子呢？这里没有一个确定的界限．这类不清晰的对象不是古典集合论的对象，不能形成我们现在讲的“集合”†．

在例 2 中，S_2 的元素为 2, 3, 7, 8, 有时也把 S_2 记做 $\{2, 3, 7, 8\}$．凡是它的元素都写在花括号中，不是它的元素都不写入花括号内．

［例 3］ 数 0, 1, 2, 3, … 叫自然数．本书中，我们把所有自然数组成的集合记做 $\mathbf{N}$．

0, 1, 2, 3 都是自然数，都是 $\mathbf{N}$ 的元素．1000 是一自然数，所以是 $\mathbf{N}$ 的元素，即 $1000\in\mathbf{N}$．当然，123789 也是一自然数，所以 $123789\in\mathbf{N}$．但是 -2 不是自然数，因此 $-2\notin\mathbf{N}$．

［例 4］ 数 …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, … 叫整数，所有整数组成的集合记做 $\mathbf{Z}$．

注意：每一个自然数都是一整数，反之并不成立．

［例 5］ 形式为 $\frac{p}{q}$（其中 p、q 都是整数，$q\neq0$；为方便起见，可以假定 p、q 互素）的数叫有理数，所有有理数组成的集合记做 $\mathbf{Q}$．

这样，我们有 $2\in\mathbf{Q}$, $-3\in\mathbf{Q}$, $-2\in\mathbf{Q}$, $\frac{1}{2}\in\mathbf{Q}$, $\frac{5}{3}\in\mathbf{Q}$, $\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$, 等等．

---

† 现代数学的一个领域弗晰（Fuzzy）集合论，是研究不清晰的对象组成的集合的．

[例 6]　所有实数组成的集合记做 $\mathbf{R}$.

这样，我们有：$2\in\mathbf{R}$, $-2\in\mathbf{R}$, $3\in\mathbf{R}$, $-3\in\mathbf{R}$, $\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$, $-\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$, $\frac{5}{3}\in\mathbf{R}$, $\sqrt{2}\in\mathbf{R}$, $-\sqrt{2}\in\mathbf{R}$, $\pi\in\mathbf{R}$（π为圆周率），$\sqrt{-1}\notin\mathbf{R}$, 等等.

还可以有更复杂的集合，也可以把一些集合汇合起来组成新的集合．例如，令 S 是这样的一集合，它的元素恰好是 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$, 亦即†

$$S:=\{\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}\}.$$

这个集合恰有四个元素 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$, 即 $\mathbf{N}\in S$, $\mathbf{Z}\in S$, $\mathbf{Q}\in S$, $\mathbf{R}\in S$, 但是 $2\notin S$, $3\notin S$.

上述"$\in$"是集合论中一个基本的关系，是元素与集合之间的"类属关系"．我们已经指出：$2\in\mathbf{N}$, $\mathbf{N}\in S$, 但 $2\notin S$. 如果令 $S':=\{2, \mathbf{N}\}$, 我们才有 $2\in\mathbf{N}$, $\mathbf{N}\in S'$, 且 $2\in S'$.

这样，由 $S_1\in S_2$ 且 $S_2\in S_3$, 不一定就有 $S_1\in S_3$. 在有的情况下，$S_1\in S_3$ 成立；在另外的情况下，可能 $S_1\notin S_3$. 究竟如何，要看具体的集合 S_1、S_2、S_3 是什么而决定，要看他们含有哪些元素而决定．一集合由它的元素所决定，这正是外延原则.

2. 外 延 原 则

由于一个集合是由它的元素完全决定，而不管它的其他任何性质，那么对于两个集合，便可以定义"相等"．就是说，任给两个集合 S_1 和 S_2, 当且仅当对于每一个元素 x; 若 $x\in S_1$

† 符号"$:=$"表示左边是由右边定义出来的，有的书上用"$=_{df}$"，二者是一个意思.

则 $x\in S_2$；并且，对于每一个元素 x，若 $x\in S_2$，则 $x\in S_1$. 则称集合 S_1 和 S_2 相等，记作 $S_1=S_2$. 上述定义方法是外延性的，称为外延公理. 如果采用符号化记法：用“$\forall x$”表示“对于每一 x”，用“$x\in S_1\longrightarrow x\in S_2$”表示“若 $x\in S_1$ 则 $x\in S_2$”，这样，外延公理（$S_1=S_2$ 当且仅当 S_1 与 S_2 有相同的元素）这一事实可以符号地写成：

外延公理　$S_1=S_2$ 当且仅当 $\forall x(x\in S_1\longleftrightarrow x\in S_2)$.

其中 $x\in S_1\longleftrightarrow x\in S_2$ 表示 $x\in S_1\longrightarrow x\in S_2$ 并且 $x\in S_2\longrightarrow x\in S_1$.

这种符号化的记法，对于初学者似乎不太习惯，可能会带来一点困难，其实，只要看多了，用多了，习惯了，这种符号化记法将会带来许多好处，它能使你在描述、表达问题时更清晰、严格和简练.

例如，集合 $S_1:=\{0, 1, 3\}$，$S_2:=\{3, 1, 0\}$. 虽然表面看 S_1 与 S_2 不同：元素的顺序不同. 由于这两个集合元素完全相同，根据外延公理，有 $S_1=S_2$. 令 $S_3:=\{4, 5, 6\}$，$S_4:=\{0, 1, 4\}$. 对于 S_1 与 S_3，因为它们的元素全不相同，故有 $S_1\neq S_3$；对于 S_1 与 S_4，它们有一个相同的元素 4，但是其它元素就不同了，因此，$S_1\neq S_4$；同理 $S_3\neq S_4$.

3. 子　集　合

当我们研究集合之间的相互关系时，一集合 S_1 是否包含在另一集合 S_2 中，这常常是一件很重要的事情.

定义 1　当集合 S_1 的每一个元素也都是集合 S_2 的一个元素时，集合 S_1 称为是集合 S_2 的一个子集合. 这时，记作 $S_1\subset S_2$. 即

$$S_1 \subset S_2 := \forall x(x \in S_1 \longrightarrow x \in S_2).$$

S_1 不是 S_2 的子集合，就记做 $S_1 \not\subset S_2$.

在 $S_1 \subset S_2$ 成立时，也称 S_1 包含在 S_2 中，有时也称集合 S_2 包含集合 S_1.

对于 $S_1 \subset S_2$、$S_3 \not\subset S_4$，可用图来加以形象说明(参见图1).

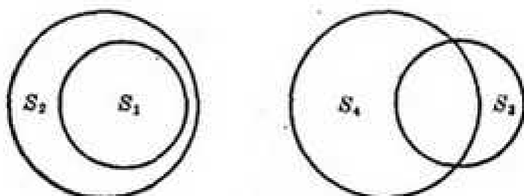


图 1

例如：

$\{0, 1\} \subset \{0, 1\}$;

$\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$;

$\{\{2\}\} \subset \{0, 1, \{2\}\}$;

$\{0, 2\} \not\subset \{0, 3, 4\}$;

$\{3\} \not\subset \{\{3\}, 4, 2\}$;

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$;

$\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$;

$\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$;

$\mathbf{Q} \not\subset \mathbf{N}$.

注意：不要把 $\in$ 与 $\subset$ 相混淆，例如：

$\{3\} \not\subset \{\{3\}, 4, 2\}$，但 $\{3\} \in \{\{3\}, 4, 2\}$;

$\{1, 3\} \subset \{0, 1, 3\}$，但 $\{1, 3\} \notin \{0, 1, 3\}$.

定理 1 对于任给的集合 S_1、S_2、S_3，有：

(1) $S_1 \subset S_1$,

(2) $S_1 \subset S_2$ 且 $S_2 \subset S_1$，则 $S_1 = S_2$,

(3) $S_1 \subset S_2$ 且 $S_2 \subset S_3$，则 $S_1 \subset S_3$.

这个定理的证明是直接从定义 1 就可以获得的. 当然, 对(2)还要用到外延原则.

人们也常把(1)称为关于$\subset$的自返性, 把(2)称为关于$\subset$的反对称性, 而(3)称为关于$\subset$的传递性.

定义 2 当 $S_1\subset S_2$ 且 $S_1\neq S_2$ 时, S_1 称为 S_2 的一真子集合. 这时, 记做$S_1\subset_+ S_2$. 也就是说,

$$S_1\subset_+ S_2 :=\forall x(x\in S_1\longrightarrow x\in S_2)$$
$$\wedge\exists x(x\in S_2\longrightarrow \neg x\in S_1).$$

其中"$\wedge$"表示"并且", 而"$\exists x$"表示"有一个 x", 或"存在一个 x", $\neg x\in S_1$ 即 $x\notin S_1$.

当 S_1 不是 S_2 的一真子集合时, 就记做 $S_1\not\subset_+ S_2$.

例如:

$$\{0, 1, \{2\}\}\subset_+\{0, 1, \{2\}, 3\};$$
$$\{3, 4\}\subset_+\{2, 3, 4\};$$
$$\{2, \{1\}\}\not\subset_+\{2, \{1\}\};$$
$$\{1, \{3\}\}\not\subset_+\{1, 3, 4\}.$$

4. 概 括 原 则

在前边, 为了给出一个集合, 常常是列举出该集合的元素. 这种方法的好处是具有明显性. 比如, 令集合 $S_1:=\{0, 1, 4\}$, 我们一眼就看出它只有三个元素, 即 0, 1, 4. 但是, 在有些情况下, 这样做是很不方便的, 比如令集合 S_2 为:

$$\{5832, 6759, 8000, 9261, 10648, 12167, 13824\}, \quad (1.1)$$

式(1.1)所确定的集合就有点烦琐了, 这样大的数目再多列出几个, 那就更复杂甚至无法写出.

当我们分析一下 S_2 的元素的性质时, 就会发现这些数都

是有规律的，它们是 18 到 24 之间的这七个自然数的立方数，亦即当 x 满足 $18\leqslant x\leqslant 24$ 时，S_2 的元素恰为 x^3. 这样就有：

$$S_2:=\{y\mid x\text{ 是一自然数，且 }18\leqslant x\leqslant 24\text{ 并且 }y=x^3\},\tag{1.2}$$

其中竖杠"|"的前边是集合 S_2 的元素，它必须满足竖杠"|"的后边所列举的条件，亦即"x 是一自然数且 $18\leqslant x\leqslant 24$ 并且 $y=x^3$". 这个条件也叫做一个性质. (1.2)表明 S_2 的元素都具有性质为"把这个元素开立方，立方根为 18 与 24（包括 18 和 24 在内）之间的自然数". 不难验证它的元素恰好是在(1.1)中所列举的那些. 由外延原则，(1.1)与(1.2)定义了同样的集合.

当我们把 (1.2) 式中的条件改为"x 是一自然数且 $10\leqslant x\leqslant 109$ 并且 $y=x^3$"时，所定义的集合称为 S_2'. 如果要用类似于 (1.1) 式那样的显式去列举 S_2' 时，那将是很烦琐的事情了. 如果把(1.2)式中的条件改为："x 是一有理数且 $10\leqslant x\leqslant 109^{2000}$ 且 $y=x^3$"时，这时如果要使用 (1.1) 那样的显式，枚举这样的集合的全部元素就几乎不可能. 为此，为了方便、简洁地给出一个集合，就需采用如象 (1.2) 这样的定义方式. 上述所列举的条件都叫做性质，康托尔把所有满足给定性质的元素汇集在一起而成为一个集合，并且称之为**概括原则**. 也就是说：

概括原则 任给一个性质 P，那么存在着一个集合 S，它的元素恰好是具有性质 P 的那样的一些对象，亦即

$$S:=\{x\mid P(x)\},$$

其中 $P(x)$ 是"x 具有性质 P"的一个缩写. 这样，就有 $\forall x(x\in S\longleftrightarrow P(x))$.

这条原则在使用上是强有力的，而且也是很方便的. 比

如，我们曾给出的集合 $\{2, 3, 4, 8\}$，可用条件“$x=2$ 或者 $x=3$ 或者 $x=4$ 或者 $x=8$”来给出，可记成：

$S_2:=\{x|x=2$ 或者 $x=3$ 或者 $x=4$ 或者 $x=8\}$.

在下边，我们用“$\vee$”表示“或者”，用“$\wedge$”表示“并且”。

例如：$\{x|$“x 是一自然数”$\wedge 80\leqslant x^2\leqslant 200\}$ 就是集合 $\{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$；

$\{x|x$ 是一自然数$\}$就是集合 $\mathbf{N}$；

$\{x|x=3\}$就是集合$\{3\}$.

应该指出，使用概括原则要有限制，否则会出毛病，对此将在本书第 57 页中讨论，并将通过公理方法来解决。

5. 空集合、单元集合和无序对集合

假如取一条件为 $x\neq x$，并且令集合 S 为 $\{x|x\neq x\}$. 在我们的直观中，或者在我们的思维中，因为不存在确定的能够区别的这样一个对象，它不等于它自己，也就是说集合 S 是没有元素的。由外延原则，这种集合只有一个，就叫做空集合，并且常常记做 $\varnothing$.

定理 2 对于所有的集合 S，有 $\varnothing\subset S$. 也就是说，空集合是任一集合的子集合.

证明 假定 $\varnothing\not\subset S$，那么有一元素 x，使得 $x\in\varnothing, x\notin S$. 但这是不可能的，因为 $\varnothing$ 中不可能有一元素 x. 所以 $\varnothing\subset S$.

⊣

注意：$\varnothing$ 是一集合，它没有元素，而 $\{\varnothing\}$ 是一集合，它有一个元素 $\varnothing$，所以 $\varnothing\neq\{\varnothing\}$，前者一无所有，后者有一容器。

读者可以验证：

(1) $\varnothing\subset\varnothing$,　　　　(2) $\varnothing\notin\varnothing$,

(3) $\varnothing\subset\{\varnothing\}$, (4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$,

(5) $\{\varnothing\}\subset\{\varnothing\}$, (6) $\{\varnothing\}\notin\{\varnothing\}$,

(7) $\varnothing\subset\{\{\varnothing\}\}$, (8) $\varnothing\notin\{\{\varnothing\}\}$,

(9) $\{\varnothing\}\not\subset\{\{\varnothing\}\}$, (10) $\{\varnothing\}\in\{\{\varnothing\}\}$,

(11) $\varnothing\in\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, (12) $\{\varnothing\}\in\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,

(13) $\varnothing\subset\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, (14) $\{\{\varnothing\}\}\subset\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

恰好含有一个元素的集合，叫做*单元集合*.

例如 $\{\varnothing\}$, $\{1\}$, $\{n\}$, $\{a\}$, $\{\mathbf{N}\}$, $\{\mathbf{Q}\}$, 都是单元集合. 上述这六个单元集合的元素分别为 $\varnothing$, 1, n, a, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$. 而 $\{1, 2\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$ 都不是单元集合，因为它们的元素都不只一个；$\varnothing$ 也不是单元集合，因为它没有元素.

恰好有二个元素的集合，并且这二个元素之间没有一定顺序的，叫做*无序对集合*. 比如，前边提到的 $\{1, 2\}$ 就是一个无序对集合，对于 $\{1, 2\}$，还可以写作 $\{2, 1\}$. 也就是说，我们有

$$\{1, 2\}=\{2, 1\}.$$

对于任意的对象 a、b，无序对集合 $\{a, b\}$ 都等于 $\{b, a\}$. 另外，$\{\mathbf{N}, \mathbf{Q}\}$, $\{1, \mathbf{N}\}$, $\{\mathbf{R}, \mathbf{N}\}$ 都是无序对集合.

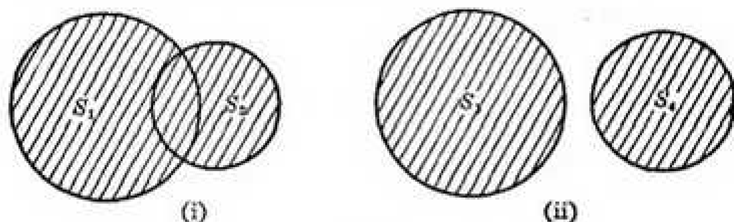
还应当注意，就是 $\{1, 1, 2\}=\{1, 2\}$. 在任一集合中，某一个元素重复出现多次和它只出现一次，其结果没有变化，仍然是相同的集合. 因此，$\{a, a\}$ 就是单元集合 $\{a\}$，$\{a, a, a\}$ 还是单元集合 $\{a\}$；而 $\{a, a, b\}$，$\{b, b, a, a\}$ 也仍然是无序对集合 $\{a, b\}$.

6. 集合的并、交和相对补

令 S_1、S_2 是两个集合，我们现在定义第三个集合 $S_1\cup S_2$,

叫做 S_1 与 S_2 的并集合，它是这样的一个集合，它的元素至少是属于 S_1 和 S_2 二者之一（见图 2），即：

定义 3 $S_1 \cup S_2 := \{x \mid x \in S_1 \vee x \in S_2\}$.



(i) (ii)

图 2

根据概括原则，$S_1 \cup S_2$ 是一个集合，并且对于所有的 x，有 $x \in S_1 \cup S_2 \longleftrightarrow x \in S_1 \vee x \in S_2$. 亦即：

$$\forall x(x \in S_1 \cup S_2 \longleftrightarrow x \in S_1 \cup x \in S_2).$$

例如： $\{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$\{2, 3\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$;

$\{2, 3\} \cup \varnothing = \{2, 3\}$;

$\{2, 3\} \cup \{2, 3\} = \{2, 3\}$.

定理 3 对于任给集合 S_1、S_2、S_3，有：

(1) 析等律：$S_1 \cup S_1 = S_1$;

(2) 交换律：$S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1$;

(3) 结合律：$S_1 \cup (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cup S_2) \cup S_3$.

证明 对于任意的 x，

$$x \in S_1 \cup S_1 \longleftrightarrow x \in S_1 \vee x \in S_1$$
$$\longleftrightarrow x \in S_1;$$

$$x \in S_1 \cup S_2 \longleftrightarrow x \in S_1 \vee x \in S_2$$
$$\longleftrightarrow x \in S_2 \vee x \in S_1$$
$$\longleftrightarrow x \in S_2 \cup S_1;$$

$$
\begin{aligned}
x\in S_1\cup(S_2\cup S_3) &\longleftrightarrow x\in S_1\vee x\in(S_2\cup S_3)\\
&\longleftrightarrow x_1\in S_1\vee x\in S_2\vee x\in S_3\\
&\longleftrightarrow (x\in S_1\vee x\in S_2)\vee x\in S_3\\
&\longleftrightarrow x\in(S_1\cup S_2)\vee x\in S_3\\
&\longleftrightarrow x\in(S_1\cup S_2)\cup S_3.
\end{aligned}
$$
⊣

令 S_1, S_2 为两个集合，我们定义它们的交集合 $S_1\cap S_2$，它是这样一个集合，它的元素恰好是既属于 S_1 又属于 S_2 的那些对象（见图3），即：

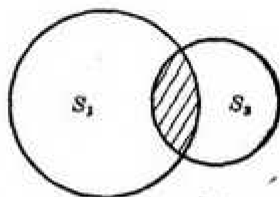


图 3

定义 4 $S_1\cap S_2:=\{x|x\in S_1\wedge x\in S_2\}$.

根据概括原则，$S_1\cap S_2$ 是一集合，并且对于所有的 x，有 $x\in S_1\cap S_2\longleftrightarrow x\in S_1\wedge x\in S_2$，亦即：

$$\forall x(x\in S_1\cap S_2\longleftrightarrow x\in S_1\wedge x\in S_2).$$

例如：
$\{1, 2, 3\}\cap\{2, 4, 5\}=\{2\}$;
$\{1, 2, 3\}\cap\{1, 2, 3\}=\{1, 2, 3\}$;
$\{1, 2, 3\}\cap\{4, 5\}=\varnothing$;
$\{1, 2, 3\}\cap\varnothing=\varnothing$.

定理 4 对于任给集合 S_1、S_2、S_3，有：

(1) 合等律：$S_1\cap S_1=S_1$;

(2) 交换律：$S_1\cap S_2=S_2\cap S_1$;

(3) 结合律：$S_1\cap(S_2\cap S_3)=(S_1\cap S_2)\cap S_3$.

证明 对于任意的 x，

$$
\begin{aligned}
x\in S_1\cap S_1 &\longleftrightarrow x\in S_1\wedge x\in S_1\\
&\longleftrightarrow x\in S_1,\\
x\in S_1\cap S_2 &\longleftrightarrow x\in S_1\wedge x\in S_2\\
&\longleftrightarrow x\in S_2\wedge x\in S_1\\
&\longleftrightarrow x\in S_2\cap S_1,
\end{aligned}
$$

$$x\in S_1\cap(S_2\cap S_3)\longleftrightarrow x\in S_1\wedge x\in(S_2\cap S_3)$$
$$\longleftrightarrow x\in S_1\wedge(x\in S_2\wedge x\in S_3)$$
$$\longleftrightarrow (x\in S_1\wedge x\in S_2)\wedge x\in S_3$$
$$\longleftrightarrow x\in S_1\cap S_2\wedge x\in S_3$$
$$\longleftrightarrow x\in(S_1\cap S_2)\cap S_3. \qquad \dashv$$

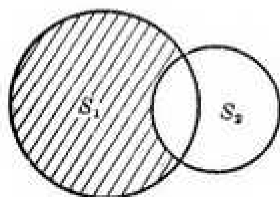


图 4

现在，我们来定义两个集合的相对补. 令 S_1, S_2 为任意的两个集合，S_2 相对于 S_1 的补集合是 S_1-S_2，它的元素是把 S_1 中含有的 S_2 的元素全部去掉所剩下的所有的元素（见图4）. 亦即

定义 5 $S_1-S_2:=\{x\mid x\in S_1\wedge x\notin S_2\}$.

根据概括原则，S_1-S_2 仍然是一集合，并对于所有的 x，$x\in S_1-S_2\longleftrightarrow x\in S_1\wedge x\notin S_2$，亦即：$\forall x(x\in S_1-S_2\longleftrightarrow x\in S_1\wedge x\notin S_2)$.

例如： $\{1, 2, 3\}-\{1, 2\}=\{3\}$;

$\{1, 2, 3\}-\{1, 2, 4\}=\{3\}$;

$\{1, 2, 3\}-\varnothing=\{1, 2, 3\}$;

$\{1, 2, 3\}-\{1, 2, 3\}=\varnothing$;

$\{1, 2, 3\}-\{4, 5, 6\}=\{1, 2, 3\}$.

定理 5 假定 S_1, S_2, S_3 是任意的集合，则

(1) $S_1-S_1=\varnothing$;

(2) $S_2\subset S_1\Rightarrow S_1-(S_1-S_2)=S_2$;

(3) $(S_1-S_2)-S_3=S_1-(S_2\cup S_3)$.

证明 对于任意的 x，有：

(1) $x\in S_1-S_1\longleftrightarrow x\in S_1\wedge x\notin S_1$.

右边是不可能成立的，因此不存在这样的 x，使得

$x\in S_1-S_1$; 同时，由概括原则，S_1-S_1 仍然是一集合，所以 S_1-S_1 就恰好是空集合了.

(2) $x\in S_1-(S_1-S_2)\longleftrightarrow x\in S_1\wedge x\notin(S_1-S_2)$

$$\longleftrightarrow x\in S_1\wedge(x\notin S_1\vee x\in S_2)$$

$$\longleftrightarrow x\in S_1\wedge x\notin S_1\vee x\in S_1\wedge x\in S_2$$

$$\longleftrightarrow x\in S_1\wedge x\in S_2.$$

$$\longleftrightarrow x\in S_2.$$

在上述推导过程中，用到了:

$$x\notin(S_1-S_2)\longleftrightarrow \neg(x\in(S_1-S_2))$$

$$\longleftrightarrow \neg(x\in S_1\wedge x\notin S_2)$$

$$\longleftrightarrow x\notin S_1\vee x\in S_2,$$

这里符号"$\neg$"意指"非"、"否定". 对于任一个性质 P，用 $\neg P$ 表示非性质 P，用 $\neg P(x)$ 表示 x 不具有性质 P. 这样，显然有:

$$x\notin(S_1-S_2)\longleftrightarrow \neg(x\in(S_1-S_2)),$$

而 $\neg(x_1\in S_1\wedge x\notin S_2)\longleftrightarrow x\notin S_1\vee\neg(x\notin S_2)$

$$\longleftrightarrow x\notin S_1\vee x\in S_2.$$

第二步直观上是很显然的，$\neg(x\notin S_2)\longleftrightarrow x\in S_2$ 也就通常推理中的否定之否定为肯定，这是个很有意思的逻辑问题，对此问题有兴趣的读者，可参阅各节末所列的逻辑思考问题. 第一步也是个有趣的逻辑问题，"并非 (P_1 和 P_2)" 就等价于 "$\neg P_1$ 或 $\neg P_2$".

(3) $x\in(S_1-S_2)-S_3\longleftrightarrow x\in(S_1-S_2)\wedge x\notin S_3$

$$\longleftrightarrow x\in S_1\wedge x\notin S_2\wedge x\notin S_3$$

$$\longleftrightarrow x\in S_1\wedge\neg(x\in S_2\vee x\in S_3)$$

$$\longleftrightarrow x\in S_1\wedge\neg(x\in(S_2\cup S_3))$$

$$\longleftrightarrow x\in S_1\wedge x\notin(S_2\cup S_3)$$

$$\longleftrightarrow x\in S_1-(S_2\cup S_3).$$ ⊣

7. 幂 集 合

对于单元集合，它的子集合只有空集合 $\varnothing$ 和它自身．例如，$\{1\}$的所有子集合为 $\varnothing$ 与$\{1\}$．对于二个元素的集合，它的子集合有四个．比如$\{1, 2\}$的子集，容易验证恰为 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$．至于三个元素的集合，比如 $\{1, 2, 3\}$ 的子集合就有：$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$ 这样八个子集合．现在问：一集合 S 的所有子集合能否组成一个新的集合呢？回答是肯定的，并且把这个新的集合叫做 S 的幂集．例如$\{1\}$的幂集为$\{\varnothing, \{1\}\}$，而$\{1, 2\}$的的幂集为$\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$，集合 $\{1, 2, 3\}$ 的幂集为 $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$．并且，通常把集合 S 的幂集记作 $P(S)$．即有：

定义 6 $P(S):=\{x|x\subset S\}$，亦即

$$P(S)=\{x|\forall t(t\in x\longrightarrow t\in S)\}.$$

由概括原则，对于任意的集合 S, $P(S)$显然也是一集合．并且，上述几个集合的例子暗示了：一集合 S 若有 n 个元素，则其幂集 $P(S)$ 就恰好有 2^n 个元素．下面，我们将证明这一结论．为此，我们先证明一个引理

引理 假定 S 是有穷集合，$a\notin S$，并且 $S_1:=S\cup\{a\}$，则 S_1 的子集数目恰为 S 的子集数目的二倍．

证明 对于 S 的每一子集，都能附加上元素 a 或不附加上 a，由这一过程可以获得 S_1 的所有子集合，这是因为，对于 S 的每一子集合 S_2，都有 S_1 的两个子集合 S_2 或 $S_2\cup\{a\}$，这就证得了 S_1 的元素个数恰为 S 的 2 倍．

定理 6 对于所有的自然数 n 和所有的集合 S，如果 S

恰有 n 个元素，则 $P(S)$ 就恰有 2^n 个元素

证明 用数学归纳法来证明这一定理，即对 S 的元素的个数运用归纳法。

对于每一自然数 n，令 $A(n)$ 为这样的一个命题：对于所有的集合 S，如果 S 恰有 n 个元素，则 $P(S)$ 恰有 2^n 个元素。

对于命题 $A(n)$，我们只要证明了下列两点，就证明了我们的定理：

(1) $A(0)$ 成立；

(2) 对于所有的自然数 n，如果 $A(n)$ 成立，那么可以推得 $A(n+1)$ 成立。

现在我们来证明 (1)．设 S 是一集合且 S 没有元素，所以 $S=\varnothing$．而 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$，$2^0=1$，因此，(1) 显然成立。

我们再来证明 (2)．设 $n\in\mathbf{N}$，且 $A(n)$ 成立，即 S 恰有 n 个元素，$P(S)$ 恰有 2^n 个元素，在此假设下来证明 $A(n+1)$，亦即当 S_1 恰有 $n+1$ 个元素时，求证 $P(S_1)$ 恰有 2^{n+1} 个元素．不妨假定 $a\in S_1$，$a\notin S$，且 $S_1=S\cup\{a\}$．所以，根据上述引理，$P(S_1)$ 的元素的个数为 2 倍于 $P(S)$ 的元素的个数，亦即等于 $2\cdot 2^n=2^{n+1}$． ⊣

注意：上述定理证明中，使用了数学归纳法．数学归纳法用符号化来表示，就是：

$$A(0)\wedge\forall n\in\mathbf{N}[A(n)\longrightarrow A(n+1)]\longrightarrow\forall n\in\mathbf{N}A(n),$$

其中 $\forall n\in\mathbf{N}B$ 为 $\forall n(n\in\mathbf{N}\wedge B)$ 的缩写．如果不用缩写，上式就是：

$$A(0)\wedge\forall n[n\in\mathbf{N}\wedge[A(n)\longrightarrow A(n+1)]]\longrightarrow\forall n(n\in\mathbf{N}\wedge A(n)).$$

如果在上下文中很清楚地说明变元 n 仅取自然数值时，上式也可更简明地写成：

$$A(0) \wedge \forall n[A(n) \longrightarrow A(n+1)] \longrightarrow \forall n A(n).$$

前已知道，当 S 中元素的个数为 0 时，$P(S)$ 元素的个数为 1；当 S 中元素的个数为 1 时，$P(S)$ 元素的个数为 2；当 S 中元素的个数为 2 时，$P(S)$ 元素的分数为 4；当 S 中元素的个数为 3 时，$P(S)$ 元素的个数为 8；… 当 S 有 10 个元素时，由定理 6，$P(S)$ 就有 2^{10} 个元素，即 S 恰有 1024 个子集. 这个数目的增长速度是很惊人的.

注意：我们已经注意到一个集合的元素的个数问题，这是集合论的一个很重要的问题，也是本书要讨论的重点. 我们从第 28 页开始来讨论这一问题.

练 习 一

1. 设 A、B、C 为任意集合，证明：

(1) $A \cap B \subset A$；

(2) $A \subset B \longrightarrow A \cap C \subset B \cap C$；

(3) $C \subset A \wedge C \subset B \longrightarrow C \subset A \cap B$；

(4) $A \cap (A \cup B) = A$；

(5) $A \cup (A \cap B) = A$；

(6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

(7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. 设 A、B 为任意集合，证明：

(1) $A \subset B \longrightarrow P(A) \subset P(B)$；

(2) $P(A) \subset P(B) \longrightarrow A \subset B$；

(3) $P(A) = P(B) \longleftrightarrow A = B$；

(4) $P(A) \in P(B) \longrightarrow A \in B$；

(5) 举例说明 $A \in B$ 但 $P(A) \notin P(B)$，即 (4) 的逆不成立.

3. 求：

(1) $P(\varnothing)$；

(2) $P(P(\varnothing))$；

(3) $P(P(P(\varnothing)))$；

(4) $P(P(P(P(\varnothing))))$.

4. 求：

(1) $\mathbf{Z} - \mathbf{N}$；

(2) $\mathbf{Z} \cap \mathbf{N}$；

(3) $\mathbf{Z} - (\mathbf{Z} - \mathbf{N})$；

(4) $\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}$；

(5) $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

5. 令 $0 := \varnothing$, $1 := 0 \cup \{0\}$, $2 := 1 \cup \{1\}$, $3 := 2 \cup \{2\}$, $4 := 3 \cup \{3\}$,

(1) 验证上述 0, 1, 2, 3, 4 都是集合；

(2) 验证 $1 \in 2$, $1 \in 3$, $1 \in 4$, $2 \in 3$, $3 \in 4$, $0 \in 4$；

(3) 仅用 $\varnothing$ 与 $\{\quad\}$ 写出 4 來.

6. 令　$A:=\{3, 4\}$, $B:=\{4, 3\}\cup\varnothing$, $C:=\{4, 3\}\cup\{\varnothing\}$,

$D:=\{x|x^2-7x+12=0\}$, $E:=\{\varnothing, 3, 4\}$,

$F:=\{4, 4, 3\}$, $G:=\{4, \varnothing, \varnothing, 3\}$.

问上述集合中哪些是相等的, 哪些是不等的?

逻辑思考题

1. 李庄有一座磨房, 在村东头或者在村西头张三弄不清楚, 但他确知不是在村东头就一定在西头, 反之亦然, 事实也正是如此. 李庄有兄弟二人, 其一只说假话不说真话, 其二只说真话不说假话. 张三知道这一情况, 但他分不清谁说真话谁说假话. 一天, 张三来到李庄街上, 正遇到这兄弟俩之一. 张三问: 我若问你的弟兄, 磨房在那里, 他将如何回答我呢? 此人作了回答, 于是张三立即正确地判断出磨房的位置了. 请问, 张三是如何判断的?

2. 逻辑学中的所谓**命题**, 是指表达一个完整意思的一句话, 有时也称一个**语句**. 如"张三是甲班的一个学生"、"李四不是甲班的学生"、"$n\in S$"、"$4\notin S$"等等, 都是命题(或语句). 我们假定 A、B 都命题, 试考虑:

(1) 若 A 为真命题, $\neg A$, $\neg\neg A$ 分别为真命题呢? 还是假命题呢?

(2) 若 A 为真命题, B 为假命题, 试分析 $A\vee B$, $A\wedge B$, $\neg A\vee B$, $\neg A\wedge B$, $A\vee\neg B$, $A\wedge\neg B$ 分别为真命题呢? 还是假命题呢?

(3) 试分析 $A\longrightarrow B$ 与 $\neg A\vee B$ 二者的真假值的关系?

(4) 试分析 $\neg(\neg A\vee\neg B)$ 与 $A\wedge B$ 二者的真假值的关系.

3. 设 A、B 为任意的命题, 若 $\neg A$ 能推导出 B, 也能推导出 $\neg B$, 那么 A 为一真命题.

二、关系、函数、一一对应

现在, 我们来讨论集合的度量. 也就是说, 我们可以这样提出问题:

(1) 任给两个集合 S_1 与 S_2, 它们的元素个数是相同的呢, 还是其中之一比另一个的元素要更多一些?

(2) 自然数集合 $\mathbf{N}$ 的元素有多少? $\mathbf{N}$ 的幂集合 $P(\mathbf{N})$

的元素有多少？

这两个问题，尤其第二个问题，正是本书中要讨论的中心问题．这里，对这些问题将给出一个精确化的提法，建立集合的对等概念．

1. 有穷集合与无穷集合

定义 1 对于一个集合 S，如果存在一个自然数 n，使得 S 恰有 n 个元素，则集合 S 叫做有穷的．如果一集合不是有穷的，就叫做是无穷的集合．

例如：

$\varnothing$ 是有穷集合，它的元素是 0 个．

单元素集合$\{\varnothing\}$、$\{n\}$、$\{N\}$是有穷的．

$\{1, 2, \cdots, n\}$ 是有穷集合，它的元素的个数恰为 n．

令 S 为有穷集合，则 S 的幂集合 $P(S)$ 也是有穷集合．

令 S_1、S_2 都是有穷集合，则 $S_1 \cup S_2$，$S_1 \cap S_2$，$S_1 - S_2$ 都是有穷集合．

定理 1 自然数集合 $\mathbf{N}$ 是一无穷集合．

证明 假定 $\mathbf{N}$ 为有穷集合，据定义，有一自然数 n，使得 $\mathbf{N}$ 恰有 n 个元素．由 $\mathbf{N}$ 的定义，$0, 1, \cdots, n-1$ 都属于 $\mathbf{N}$，这恰好是 n 个元素；但是，由 n 的定义，n 本身也是一个自然数，因此，$n \in \mathbf{N}$．这样，与题设 $\mathbf{N}$ 有 n 个元素相矛盾，这就证得了 $\mathbf{N}$ 是一无穷集合†． ⊣

† 注意：定理 1 的证明中，使用了这样一个逻辑方法：先假设我们欲求证的命题 A 不成立，亦即假定 $\neg A$，从这一前提出发，推得矛盾，亦即推得一个 B，一个 $\neg B$（在上面的证明中，命题 B，$\neg B$ 分别为"$\mathbf{N}$ 恰有 n 个元素"与"$\mathbf{N}$ 的元素个数不等于 n"），这时就断定证明了我们的欲证命题 A．这是一个很有趣、很重要的逻辑规则．

推论 $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ 都是无穷集合.

现在，我们来回答问题 (1)：如果 S_1、S_2 都是有穷集合，我们可以分别去数它们，从而知道它们的元素个数是相等的，还是其中之一比另外一个更多一些？甚至，多的数目也可得知．如果 S_1、S_2 之一为无穷集合时，可以断定那个无穷集合比另一个(有穷集合)的元素更多一些，这也是容易回答的．但是，两个都是无穷集合时，该如何去判断这一问题呢？

2. 伽利略问题

早在 1638 年，意大利天文学家伽利略发现了这样一个问题，就是：正整数集合

$$S_1=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

与正整数的平方数集合：

$$S_2=\{1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots\},$$

这两个集合中，哪一个的元素更多一些呢？ 一方面，凡是 S_2 中的元素都是 S_1 中的元素，亦即 S_2 是 S_1 的一个子集合，而且是一个真子集合，因为 2, 3, 5, 6 等等都不在 S_2 中，这样，S_1 的元素要比 S_2 的元素多一些．但是，另一方面，S_1 中每一个元素都有 S_2 中唯一的元素与之对应，即对于 $n\in S_1$，我们让它的平方数 n^2 对应于 n，这样 S_2 的元素个数又不比 S_1 少了． 到底 S_2 是否比 S_1 少呢？ 伽利略对此困惑不解，许多数学家也回答不了这个问题.

直到上世纪七十年代，集合论的创始人数学家康托尔才第一次系统地研究了无穷集合的度量问题，并给出了度量一集合的基本概念：一一对应，从而正确地回答了上述问题．也就是说，如果两个集合之间能够建立一个一一对应，就叫做它

们的个数是相等的．为了精确地刻划“一一对应”这一重要的数学概念，我们引进关系、函数、两个集合之间的内射、满射、双射等基本概念．

3. 有　序　对

在日常生活中，有许多事物是成对出现的，而且这种成对的东西还有一定的顺序．比如“上下”，“左右”，“前后”，“里外”等等．在集合论中，也有这样的集合，它恰好有两元素 a、b，而且 a 在前，b 在后．这种集合和我们在第 9 页谈到的无序对不同，这种集合叫做*有序对集合*，并记作 $\langle a, b\rangle$．这种集合该如何定义呢？也就是说，如何利用已有的集合（主要是空集合，单元集合和无序对集合）来定义有序对集合呢？历史上曾出现过不同的定义法，在 1921 年有位波兰数学家库兰达夫斯基（Kuratowski, K.）给出了一个定义，大家都感到满意，现在已成为公认的定义了．

定义 2　$\langle a, b\rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

由定义 2，集合 $\langle a, b\rangle$ 显然是比 a、b 高二层的集合，是它们的集合的集合．为了证明这定义的合理性，必须证明这个集合由 a、b 唯一决定了，而且给出 $\langle a, b\rangle$ 时也唯一决定了 a 与 b 以及它们的顺序．比如无序对集合有：$\{a, b\}=\{b, a\}$，而不管 a、b 是什么；有序对集合则不然，在一般情况下 $\langle a, b\rangle\neq\langle b, a\rangle$，这就是“序”的要求．

定理 2　$\langle u, v\rangle=\langle x, y\rangle$ 当且仅当 $u=x$ 并且 $v=y$.

证明　当 $x=u$, $y=v$ 时，有 $\{x\}=\{u\}$、$\{u, v\}=\{x, y\}$，当然就有 $\{\{x\}, \{x, y\}\}=\{\{u\}, \{u, v\}\}$ 了，即证得了

$$\langle x, y\rangle=\langle u, v\rangle.$$

现在我们假定$\langle x, y\rangle=\langle u, v\rangle$，亦即

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}=\{\{u\}, \{u, v\}\}.$$

因此有 $\{u\}\in\{\{x\}, \{x, y\}\}$和$\{u, v\}\in\{\{x\}, \{x, y\}\}$. 由左边的式子，我们获得下二式必有一个成立：

$$(1)\ \{u\}=\{x\}\ \text{或}\ (2)\ \{u\}=\{x, y\};$$

由右边的式子，我们获得下二式必有一个成立：

$$(3)\ \{u, v\}=\{x\}\ \text{或}\ (4)\ \{u, v\}=\{x, y\}.$$

若(2)成立，可得 $u=x=y$，这时，当(3)成立时，就有 $v=u=x=y$(类似地，当(4)成立时也同样有 $v=u=x=y$)；若(1)成立，可得$u=x$并且(4)成立，就有$v=y$或者$u=y$成立. 当$u=y$时，这时(2)成立，即不管怎样，都有$v=u=x=y$；当$v=y$时，这时，也是我们所希望的结果. ⊣

根据定义 2 和定理 2，可以把平面上的一个点看作一个有序对集合$\langle x, y\rangle$，它的第一个元素x是平面上点的横坐标分量，第二个元素y就是平面上点的纵坐标分量. 平面上点的这种表示法是笛卡尔在集合论产生之前就给出了，现在是用集合论的方法定义有序对，并把它作为一种集合来处理问题.

4. 笛卡尔乘积

定义 3 任给两个集合S_1、S_2，我们汇集所有这样的有序对集合$\langle x, y\rangle$(其中$x\in S_1$, $y\in S_2$)成为一个整体，亦即

$$S_1\times S_2:=\{z\mid\exists x\exists y(x\in S_1\wedge y\in S_2\wedge z=\langle x, y\rangle\}$$

叫做S_1与S_2的笛卡尔乘积或卡氏积.

定理 3 对于任意的集合S_1与S_2，它们的笛卡尔乘积$S_1\times S_2$也是一集合.

证明 由概括原则，这结论是很明显的.

为了将来公理集合论中这个定理仍然很明显地成立，我们下面还要给出第二个证明.

首先证明：若 $x\in S$, $y\in S$, 则 $\langle x, y\rangle\in P(P(S))$. 亦即 $\langle x, y\rangle$ 属于 S 的幂集合的幂集合，这是因为：

$$x\in S \text{ 且 } y\in S,$$

由子集合的定义，有：

$$\{x\}\subset S \text{ 且 } \{x, y\}\subset S,$$

由幂集合的定义，有：

$$\{x\}\in P(S) \text{ 且 } \{x, y\}\in P(S),$$

再由子集合的定义，有：

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}\subset P(S),$$

再由幂集合的定义，有

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}\in P(P(S)),$$

即

$$\langle x, y\rangle\in P(P(S)).$$

其次，当 $x\in S_1$、$y\in S_2$ 时，取 $S:=S_1\cup S_2$, 自然有 $\langle x, y\rangle\in P(P(S_1\cup S_2))$.

第三，由 $S_1\times S_2$ 的定义，显然有：

$$S_1\times S_2=\{z\mid z\in P(P(S_1\cup S_2)\wedge\exists x\exists y(x\in S_1\wedge y\in S_2\wedge z=\langle x, y\rangle))\}.$$

这就证明了 $S_1\times S_2$ 是一集合. ⊣

5. 关　　系

定义 4　有序对的一集合 R 叫做一个*关系* R.

也就是说：一集合 R 的每一元素都是一有序对集合时，就叫 R 为一*关系*.

在日常生活中，在数学中，关系的例子是很多的. 比如父

子、师生、朋友都是关系，令 R_1 为父子关系，$\langle x, y\rangle \in R_1$ 表示 x 是 y 的父亲．现在我们已知贾政是贾宝玉的父亲，所以，有序对〈贾政，贾宝玉〉$\in R_1$．令 R_2 为师生关系，$\langle x, y\rangle \in R_2$ 表示 x 是 y 的老师，现在知道张三是李四的老师，因此〈张三，李四〉$\in R_2$．令 R_3 为朋友关系时，李白、杜甫是朋友，因此〈李白，杜甫〉$\in R_3$，并且〈刘备，张飞〉$\in R_3$，但是，我们知道林冲与高俅不是朋友，因此〈林冲，高俅〉$\notin R_3$．

在数学中，小于“<”是一关系．比如 $\{\langle 3, 4\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 4, 5\rangle\}$ 就是对于集合 $\{3, 4, 5\}$ 的一个小于关系．其实，$\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的任一子集合都是一关系．更一般地说，对于任意集合 S_1、S_2，则 $S_1\times S_2$ 的任一子集合都是一关系．

对于一关系 R，$\mathrm{dom}(R):=\{x\mid(\exists y(\langle x, y\rangle\in R)\}$ 称为 R 的定义域，$\mathrm{ran}(R):=\{y\mid\exists x(\langle x, y\rangle\in R)\}$ 称为 R 的值域．由概括原则，显然有下边的定理 4 成立：

定理 4　对于任意的关系 R，定义域 $\mathrm{dom}(R)$、值域 $\mathrm{ran}(R)$ 都是集合．

用图形来表示关系，常常是很直观的．

例如，设 $R:=\{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 3, 5\rangle\}$，那么，$\mathrm{dom}(R)=\{1, 2, 3, 4\}$，$\mathrm{ran}(R)=\{1, 3, 4, 5\}$．并且，可用图 5 表示 R．

又如，设 S 为 $\{\varnothing, 1, 2\}$，$P(S)$ 上的真包含关系为 $R:=\{\langle\varnothing, \{\varnothing\}\rangle, \langle\varnothing, \{1\}\rangle, \langle\varnothing, \{2\}\rangle, \langle\varnothing, \{\varnothing, 1\}\rangle, \langle\varnothing, \{\varnothing, 2\}\rangle, \langle\varnothing, \{1, 2\}\rangle, \langle\{2\}, \{\varnothing, 2\}\rangle, \langle\{\varnothing\}, \{\varnothing, 1\}\rangle, \langle\{2\}, \{1, 2\}\rangle, \langle\{\varnothing\}, \{\varnothing, 2\}\rangle, \langle\{1\}, \{1, 2\}\rangle, \langle\{1\}, \{\varnothing, 1\}\rangle, \langle\{\varnothing\}, \{\varnothing, 1, 2\}\rangle, \langle\{1\}, \{\varnothing, 1, 2\}\rangle, \langle\{2\}, \{\varnothing, 1, 2\}\rangle, \langle\{\varnothing, 1\}, \{\varnothing, 1, 2\}\rangle, \langle\{\varnothing, 2\}, \{\varnothing, 1, 2\}\rangle, \langle\{1, 2\}, \{\varnothing, 1, 2\}\rangle, \langle\varnothing, \{\varnothing, 1, 2\}\rangle\}$．并且，可用图 6 表示 R．

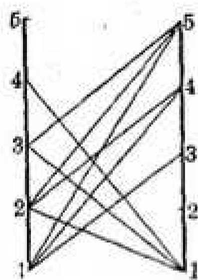


图 5

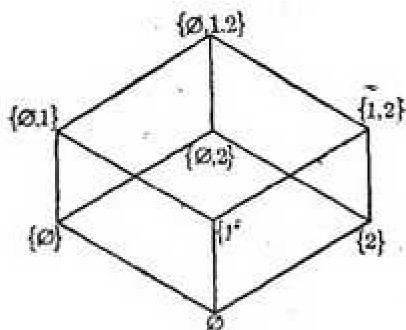


图 6

这两个例子说明，有些关系用图形来表示是很方便的。但是，对于某些关系，不可能用有穷图形来表示。

例如，令 S 为正整数集合，R 为 S 上的严格整除的关系，即

$$R:=\{\langle a, b\rangle \mid \langle a, b\rangle \in S\times S \wedge \exists x(x>1 \text{ 且 } b \text{ 等于 } a \text{ 的 } x \text{ 倍})\}.$$

显然，R 为一无穷集合。这一关系不能通过有穷图形或枚举来表示(如图 7，只能表示部分关系)，而用概括原则来表示则是容易的。

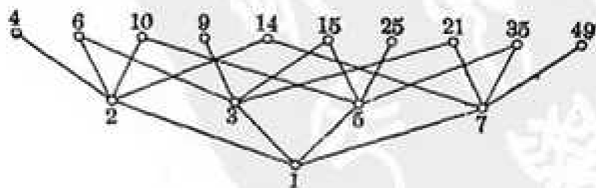


图 7

例如，令 $R:=\{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 10\rangle, \langle 6, 12\rangle, \langle 7, 14\rangle\}$。那么，$\mathrm{dom}(R)=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，$\mathrm{ran}(R)=\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 12, 14\}$。这一关系不象前述三个关系(在图 5~7 中，有许多交错的线，值域中

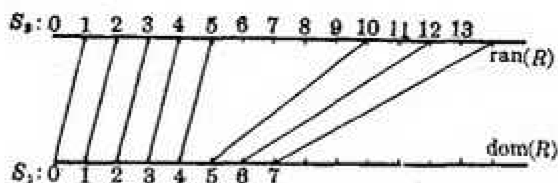


图 8

一个点可能有几个点对应到它，反之也一样)，这一关系值域中一个点仅有定义域中一点与它相对应(见图 8)。

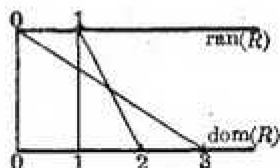


图 9

又如，令 $R:=\{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,0\rangle\}$. 那么，$\mathrm{dom}(R)=\{0,1,2,3\}$, $\mathrm{ran}(R)=\{0,1\}$. 这一关系的特点是定义域中一个点仅对应值域中一个点，反之不然(图 9)。

6. 函　　数

定义 5　对于一个关系 R, 如果满足下述条件:

$$\forall x \forall y \forall z(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, z\rangle \in R \longrightarrow y=z),$$

则称 R 为一函数。

由定义可知：函数是要求具有单值的，而关系并没有这一要求。所以，函数是一类特殊的关系，从而也是一类特殊的集合。本书中，我们常常用 f、g 或加足码表示某一函数，并且当 $x\in\mathrm{dom}(f)$ 时，$f(x)$ 就表示函数 f 在 x 点所对应的值，亦即 $\langle x, f(x)\rangle \in f$.

当 f 是一函数时，记号 $f: S_1 \longrightarrow S_2$ 表示 $S_1=\mathrm{dom}(f)$, $\mathrm{ran}(f)\subset S_2$.

关于函数的概念，如图 8，即在其定义域 S_1 中不存在一

个点 x，使得从这一点 x 在 f 之下能够生出两条不同的射线指向 S_2 中. 换句话说，S_1 中每一点在 f 之下只映射到 S_2 中一个点. 在图 9 中所确定的函数与图 8 的不同在于，定义域中不同的点可对应于值域中同一个点.

定义 6 对于一函数 $f: S_1 \longrightarrow S_2$，如果满足条件:

$$\forall x_1 \in S_1 \forall x_2 \in S_2 (x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)),$$

则称函数 f 是内射的.

也就是说，对于内射函数 f，$\mathrm{ran}(f)$ 中任一个点 y，只能有 S_1 中一个点 x，使得 x 在 f 下映射到 y 点. 由图 8 所显示的函数是内射，而图 9 则不是内射.

例如，$f=\{\langle 1, 4\rangle, \langle 3, 7\rangle, \langle 2, 7\rangle\}$，显然这是一个函数，但是它不是 $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{4, 5, 6, 7\}$ 的一个内射. 也不是 $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{4, 7\}$ 之间的内射.

又如，$f: \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{4, 5, 6, 7\}$ 的定义为 $f=\{\langle 1, 7\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$（如图 10 所示），它是一内射.

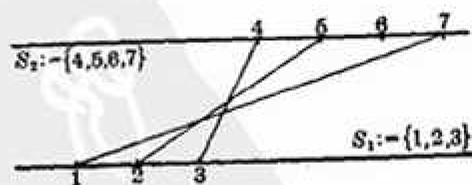


图 10

定义 7 对于一函数 $f: S_1 \longrightarrow S_2$，如果 $S_2=\mathrm{ran}(f)$，亦即对于任一 $y \in S_2$，都有一 x，使得 $y=f(x)$，则称函数 f 是满射的.

图 10 与图 8 都不是满射的. 上述图 9 所定义的函数是满射的.

例如，令 $f: \{0, 1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{4, 5, 6, 7\}$ 定义为 $f=$

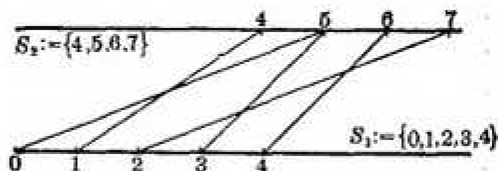


图 11

{⟨1, 4⟩, ⟨0, 5⟩, ⟨3, 5⟩, ⟨4, 6⟩, ⟨2, 7⟩}，则 f 是满射的。（见图 11）。

定义 8 对于一函数 $f: S_1 \longrightarrow S_2$，如果它既是内射的，又是满射的，则称函数 f 是**双射的**。

例如，令 f: {0, 1, 2, 3, 4}⟶{4, 5, 6, 7, 8}为{⟨0, 4⟩, ⟨1, 8⟩, ⟨2, 7⟩, ⟨3, 5⟩, ⟨4, 6⟩}，则这是双射函数。

定义 9 设 $f: S_1 \longrightarrow S_2$是一双射函数，$f^{-1}: S_2 \longrightarrow S_1$ 是 f_1 的反函数，定义为

$$f^{-1}(y):=\text{使 } y=f(x) \text{ 的那个唯一的 } x\in S_1.$$

定理 5 设 S_1、S_2、S_3 都是集合，那么有：

(1) 存在一个 S_1 到 S_1 的双射函数；

(2) 如果 $f: S_1 \longrightarrow S_2$ 是一双射，则 $f^{-1}: S_2 \longrightarrow S_1$ 也是一双射；

(3) 如果 $f_1:S_1 \longrightarrow S_2$ 和 $f_2:S_2 \longrightarrow S_3$ 都是双射的，则 $f_2\circ f_1$ 是 $S_1 \longrightarrow S_3$ 的双射函数，其中函数

$$(f_2\circ f_1)(x):=f_2(f_1(x)),\ (x\in S_1).$$

证明 (1) 只需令 $f: S_1 \longrightarrow S_1$ 为 $f(x)=x$ 即可，可把 f 记作 I_S。

(2) 设若不然，即有 $y_1\neq y_2$, $y_1\in S_2$, $y_2\in S_2$, 使得 $f^{-1}(y_1)=f^{-1}(y_2)=x$，那么由定义 9，就有 $f(x)=y_1$, $f(x)=y_2$，且 $y_1\neq y_2$，这就与 f 是一个函数发生矛盾。所以(2)得证。

(3) 直接分析定义 8，也是不难的。 ⊣

7. 两个集合之间的一一对应

定义 10 对于任意两个集合 S_1, S_2, 如果存在一双射函数 $f: S_1 \longrightarrow S_2$, 则称 S_1 与 S_2 是一一对应的, 也叫集合 S_1 与 S_2 是对等的, 并记做 $\overline{\overline{S}}_1 = \overline{\overline{S}}_2$.

注意: 一一对应(或对等), 反映两个集合之间的个数相等的概念. 很显然, 在有穷集合的情况下, 两个集合是一一对应的当且仅当它们的元素个数一样多.

"对等的"在有的书上也叫等势的, 这是康托尔在研究无穷集合时首先引进的一个最重要的概念, 只有有了这一概念和证明它的一些重要性质, 才有可能研究无穷集合, 才有集合的理论.

定理 6 对于任意的两个集合 S_1 与 S_2, 如果有一内射函数 $f: S_1 \longrightarrow S_2$, 则总存在 S_2 的一子集合 S_3, 使得 $f: S_1 \longrightarrow S_3$ 为一双射函数.

证明 令 $S_3 = \text{ran}(f)$, 显然 $S_3 \subset S_2$. ⊣

在定理 6 的情况下, 显然 $\overline{\overline{S}}_1 = \overline{\overline{S}}_3$, 这时也记作 $\overline{\overline{S}}_1 \leqslant \overline{\overline{S}}_2$.

定理 7 (康托尔-伯恩斯坦定理) 对于任意的集合 S_1 与 S_2, 如果有 $\overline{\overline{S}}_1 \leqslant \overline{\overline{S}}_2$ 和 $\overline{\overline{S}}_2 \leqslant \overline{\overline{S}}_1$, 则恒有 $\overline{\overline{S}}_1 = \overline{\overline{S}}_2$.

定理 7 的证明较为复杂, 已超出本书的范围. 有兴趣的读者不妨自己证一证, 也可参见恩达尔顿著的《集合论原理》一书或其它较为详细的集合论书籍.

定理 8 对于任意的集合 S_1、S_2、S_3, 都有:

(1) $\overline{\overline{S}}_1 = \overline{\overline{S}}_1$;

(2) 如果 $\overline{\overline{S}}_1 = \overline{\overline{S}}_2$, 则 $\overline{\overline{S}}_2 = \overline{\overline{S}}_1$;

(3) 如果 $\overline{\overline{S}}_1 = \overline{\overline{S}}_2$, $\overline{\overline{S}}_2 = \overline{\overline{S}}_3$, 则 $\overline{\overline{S}}_1 = \overline{\overline{S}}_3$.

证明 使用定理 5 及关于对等的定义 10，即可证得. ⊣

定理 9 正整数集合与正整数的平方数集合是对等的.

证明 设 S_1 为正整数集合，S_2 为正整数的平方数的集合，则函数 $f(x)=x^2$ 为 $f: S_1 \longrightarrow S_2$ 的一个双射函数（图 12），即证得了 $\overline{\overline{S}}_1=\overline{\overline{S}}_2$.



图 12

定理 10 正整数集合 S_1 与自然数集合 $\mathbf{N}$ 是对等的.

证明 令 $f(x)=x+1$，显然 $f: \mathbf{N} \longrightarrow S_1$ 是一双射函数. 这就证得了 $\overline{\overline{S}}_1=\overline{\overline{\mathbf{N}}}$. ⊣

注意：定理 9 就回答了伽利略问题；定理 10 告诉我们，伽利略问题中的两个集合的元素个数都等于自然数集合的元素个数. 而 $P(\mathbf{N})$ 是否与 $\mathbf{N}$ 对等呢？进一步问，是否每一无穷集合，都与 $\mathbf{N}$ 对等呢？这是在第 48 页康托尔定理一段中要回答的问题.

8. 选 择 公 理

我们知道，一函数是一关系，反之不一定成立. 这是因为函数要求单值性，而关系允许多值性，如象图 5 那样. 但是，我们可否这样提出问题：任意给定一关系 R，能否对它单值化，使得定义域不变，而获一个函数 f 呢？比如图 5，我们可以从中删去 $\langle 1, 5\rangle$, $\langle 2, 5\rangle$, $\langle 1, 4\rangle$, $\langle 2, 1\rangle$, $\langle 3, 1\rangle$ 而令 $f:=\{\langle 3, 5\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 4, 1\rangle\}$ 如图 13 所示，f 恰好是一函数，并满足：$\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(R)$ 和 $f\subset R$. 由这一

例子似乎可以看出，上述问题的回答是肯定的．又比如，在第24页中定义的正整数集合上的严格整除关系 R，我们也可以定义一个满足上述条件的函数 f 如下：

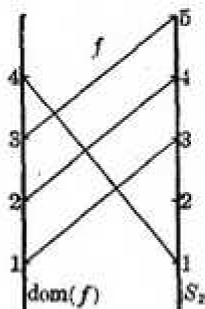


图 13

$f:=\{\langle x, y\rangle \mid x\in S\wedge y\in S$ 并且 y 是使得关系 $\langle x, y\rangle\in R$ 成立的最小的正整数$\}$，

其中 S 为正整数集合．

但是，我们决不能粗心大意地回答说：在一切情况下，即对于任意的关系 R，满足上述条件的函数 f 都是无条件成立的．肯定 f 存在的，是独立于我们至今提到过的集合论其它原则的一条原则，叫做选择原则，也称为选择公理．

选择公理（形式 I）：对于任意的关系 R，都存在一函数 f，满足条件 $\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(R)$ 和 $f\subset R$．

选择公理是1890年著名数学家皮阿诺在证明常微分方程解的存在性时，首次明确地陈述了它，并对它的正确性提出了怀疑．1904年蔡梅罗在证明良序定理时又以现今严谨的形式陈述了它、使用了它．因此，人们常称选择公理为蔡梅罗公理．

在本书的论证中，我们承认选择公理是我们的基本原则之一．并且还要讲到选择公理的其它一些等价形式．对选择公理有兴趣的读者，可参阅 T. J. Jech 著的《The Axiom of Choice》(《选择公理》)一书．

练 习 二

1．令 $A:=\{0, 1, 2\}$，$B:=\{2, 3, 4\}$，求 $A\times B=$?

2．对于 $A:=\{0, 1\}$，$B:=\{2, 4, 5\}$，求 $A\times B=$？

由 $A\times B$ 可以定义出那些关系？

3．$A:=\{0, 1\}$，$B:=\{0, 1, 2\}$，求 $A\times B=$？并说明 $A\times B\neq B\times A$。

4．对于任意集合 S 上一关系 R，如果满足下列条件

(1) $\neg xRx$，对于 $x\in S$；

(2) $xRy\wedge yRz\longrightarrow xRz$，对于任意 $x, y, z\in S$，

则称 R 为一偏序，记作 $\langle S, R\rangle$。

验证：(1) 图 6 给出一偏序 $\langle P(\{0, 1, 2\}, \subset_{+})\rangle$。

(2) 图 7 给出的 $\langle \mathbf{N}, R\rangle$ 为一偏序．其中 $\mathbf{N}$ 为自然数集合，R 为严格整除关系。

5．设 $A:=\{0, 2, 3, 4, 5, 8\}$，$B:=\{10, 12, 13, 14, 15, 16\}$，试给出 A 与 B 的一双射函数。

6．$A:=\{0, 1, 3, 4\}$，$B:=\{10, 11, 12, 13, 14\}$，试给出 A 与 B 的一内射函数。

7．$\mathbf{N}$ 为自然数集合，O 为奇数集合，试给出 $\mathbf{N}$ 与 O 的一双射函数。

逻辑思考题

1．设 A、B 为任意命题，则由 $\neg A$ 真可得 $A\longrightarrow B$ 亦真．

2．设 p、q 为任意命题，则由 p 真可得 $p\vee q$，$p\vee\neg q$ 都是真命题。

3．设 p、q、r 为任意命题，则

(1) $(p\longrightarrow q)\longrightarrow r$ 与 $(\neg p\vee q)\longrightarrow r$ 的真假值一样；

(2) $\neg p\vee\neg q\vee\neg q$ 与 $\neg(p\wedge q\wedge r)$ 的真假值一样。

三、序数与基数

关于序数、基数的概念，现代集合论一般都采用冯·诺意曼的概念，而不采用康托尔当时的概念，本书也是采用现代的概念：一序数是满足一定条件的某一集合．这些条件是什么呢？序数有那些特征呢？这是本节中首先要讨论的问题。

1. 自　然　数

什么是自然数？在小学课本上经常出现0, 1, 2, 等等；在上节，我们也这样不加考究地写出这些自然数. 但是，现在我们重新定义它们，使这些数都成为我们要研究的集合.

定义1　零是空集合，亦即 $0:=\varnothing$.

数零被定义为空集合，从纯数学角度看是合理的.

定义2　$1:=\{\varnothing\}=0\cup\{0\}$,

$2:=\{0, 1\}=1\cup\{1\}$,

$3:=\{0, 1, 2\}=2\cup\{2\}$,

$4:=\{0, 1, 2, 3\}=3\cup\{3\}$,

$5:=\{0, 1, 2, 3, 4\}=4\cup\{4\}$,

$6:=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}=5\cup\{5\}$.

一般地，假定 n 已定义，那么

$$n+1:=n\cup\{n\}.$$

这样，我们把所有的自然数都又重新定义了. 现在，就它们是集合这一方面，来分析它们的性质.

由上述定义，显然它们有这样一些性质：

(1) 传递性，也就是：如果 $n_1\in n_2$ 且 $n_2\in n_3$，则 $n_1\in n_3$. 就前几个数来说，我们有 $0\in1$(因为1是$\{0\}$，所以$\{0\}$亦即1中含有0)；同样，$1\in2$ (因为2是$\{0, 1\}$即$1\cup\{1\}$)；但0也在2中，所以 $0\in2$. 同样，有 $2\in3$，并有 $0\in3$, $1\in3$. 一般说，$n_1\in n_2$, $n_2\in n_3$，这样，

$$n_2:=\{0, 1, 2, \cdots, n_1, \cdots, n_2-1\},$$

$$n_3:=\{0, 1, 2, \cdots, n_1, \cdots, n_2-1, n_2, \cdots, n_3-1\},$$

因之 $n_1\in n_3$.

(2) 三岐性，也就是：对于任意两个自然数 n_1、n_2，下述三式恰有一个成立：

$$n_1 \in n_2, \quad n_1 = n_2, \quad n_2 \in n_1.$$

这是因为，在自然数的定义过程中，每一步恰好定义一个自然数，如果 n_1、n_2 是同时定义出来的，那么就有 $n_1 = n_2$，如果 n_1 比 n_2 先定义出来，那么有 $n_1 \in n_2$，否则 $n_2 \in n_1$.

由三岐性，我们重新定义"小于"关系：$n_1 < n_2$ 当且仅当 $n_1 \in n_2$.

(3) 对于每一自然数 n，只要它不为零，它就一定是一后继数. 也就是说：对于每一自然数 n，有一 m，使得 $n = m \cup \{m\}$. 这时，我们记作 $n = m+1$. 并且，0 不是任何数的后继数.

(4) 不存在一个自然数的无穷序列：n_1, n_2, n_3, …，使得 $n_{i+1} \in n_i$. 这称为属于关系 $\in$ 的良基性.

这是因为，对于每一自然数 m，比它小的自然总是只有有穷个.

当然，对于其它关系，不一定都具有良基性. 比如自然数集上的大于关系，$yRx := x < y$，那么，当然有无穷序列 n_1, n_2, n_3, … 使得 $n_{i+1} R n_i$. 其实这只要取自然数序列 0, 1, 2, … 就够了.

能否把自然数再作些推广，而使得推广的对象仍然有上述性质呢？试看自然数集合 $\mathbf{N}$，因为它的元素都是自然数，而且每一自然数都是它的元素，所以它具有上述传递性. 即由 $m \in n$, $n \in \mathbf{N}$，就有 $m \in \mathbf{N}$；并且，由(2)，它的元素都有三岐性；其三，$\mathbf{N}$ 不是一个后继数，也就是没有数 n，使得 $\mathbf{N} = n \cup \{n\}$（关于这一点，$\mathbf{N}$ 和 0 有共同性）；其四，$\mathbf{N}$ 有性质(4)，即 $\mathbf{N}$ 中没有元素 n_1, n_2, …，使得有 $n_{i+1} \in n_i$ 成立.

由此，我们可以把集合 $\mathbf{N}$ 推广为我们现在要研究的新对象中去，并常常把 $\mathbf{N}$ 记作 ω. 它为具有我们要求的良好性质的一个无穷集合，而每一自然数都是一个有穷集合.

2. 序　数

定义 3　对于一个集合 S，如果满足下述三个条件：

(1) $\forall x \forall y(x \in y \wedge y \in S \longrightarrow x \in S)$；

(2) $\forall x \forall y(x \in S \wedge y \in S \longrightarrow x \in y \vee x = y \vee y \in x)$；

(3) S 中不存在无穷序列 $x_1, x_2, \cdots$，使得 $x_{i+1} \in x_i$.

则称 S 为一序数.

其中，条件(3)也可以说，S 中总有一个对于关系 $\in$ 的最小元素 x_0，亦即 x_0 中没有 S 的元素了. 这也叫做关于 $\in$ 的良基性质. 其实，我们不仅要求序数要有这一性质，而且要求我们的整个对象，所有的集合，都具有关于 $\in$ 的良基性. 在陈述公理系统时，这一性质叫做正则公理，也有些书上称为基础公理.

下列两个定理显然成立.

定理 1　每一个自然数都是一序数.

定理 2　ω 是一个序数，而且是一个最小的无穷序数.

ω 的最小性可以验证如下：如果有一无穷序数 S 比 ω 小，$\omega - S$ 不空，故有自然数 n 不在 S 中，并且可以设 n 为最小的这样的数. 但是 S 是无穷的，有 $m > n$，使得 $m \in S$ 中，并且有 $n \in m$. 由传递性，可得 $n \in S$，这与 m 不在 S 中相矛盾，这就证明了 S 不小于 ω.

定义 4　对任意的序数 α，令 $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$.

并且，以后总用 α, β, γ（或加下足标码）表示序数. 有时

也用记号 $On(\alpha)$ 表示 α 为一序数.

定义 5 对于一序数 α, 如果存在一个序数 β, 使得 $\alpha=\beta+1$, 则 α 称为后继的. 对于一个非 0 的序数, 若不是后继的,就称它为极限序数.

定义 6 令 S 为任一序数集合, $\sup S$ 是指最小的序数 α, 使得当 $\beta\in S$, 就有 $\beta<\alpha$.

由前, $\omega=\{0, 1, \cdots\}$,

$$\omega+1:=\omega\cup\{\omega\}=\{0, 1, \cdots, \omega\},$$

$$\omega+2:=\omega+1\cup\{\omega+1\}=\{0, 1, \cdots, \omega, \omega+1\},$$

$$\vdots$$

这样, 对于任意的自然数 n, 我们可以定义 $\omega+n$ 了. 并且, 我们还有:

$$\omega\cdot 2:=\omega+\omega:=\sup\{\omega+n\mid n\in\omega\}.$$

这样, 又可以有 $\omega\cdot 2+1$, $\omega\cdot 2+2$, $\cdots$, $\omega\cdot 2+n$, 并且

$$\omega\cdot 3:=\sup\{\omega\cdot 2+n\mid n\in\omega\}.$$

如此下去, 我们可以有 $\omega\cdot n$, 和

$$\omega^2=\omega\cdot\omega=\sup\{\omega\cdot n\mid n\in\omega\}$$

等等; 还可以获得 ω^ω, ω^{ω^ω} 这样大的序数. 利用下一节的结果,这样的序数并不太大,还有比这些更大得多的序数.

注意: 上面对一些特殊的序数定义的运算是很有用的, 实际上, 对任意的序数 α, β 都可以定义加、乘、乘方等运算. 为此,我们把 $\alpha+1$ 记作 α', 当取定 β 时,

$$\beta+0:=\beta,$$

$$\beta+\alpha':=(\beta+\alpha)',$$

$$\beta+\alpha:=\sup\{\beta+\gamma\mid\gamma<\alpha\},\text{ 当 }\alpha\text{ 为极限序数时.}$$

这样,对任意的序数 α, β, 我们就定义了它们的加(和).

对于它们的乘积,可以定义为: 取定 β 时,

$\beta\cdot 0:=0,$

$\beta\cdot\alpha':=\beta\cdot\alpha+\beta,$

$\beta\cdot\alpha:=\sup\{\beta\cdot\gamma|\gamma<\alpha\}$，当 α 为极限序数时.

对乘方 β^α，则定义成：

$\beta^0:=1,$

$\beta^{\alpha'}:=\beta^\alpha\cdot\beta,$

$\beta^\alpha:=\sup\{\beta^\gamma|\gamma<\alpha\}$，当 α 为极限序数时.

定义 7 对于一集合 S，如果 S 上有一关系 R，满足下述三个条件：

(1) $\forall x\forall y[x\in S\wedge y\in S\longrightarrow(xRy\vee x=y\vee yRx)\wedge(xRy\longrightarrow\neg yRx)]$；

(2) $\forall S_1(S_1\subset S\longrightarrow\exists y(y\in S_1\wedge\forall x(x\in S_1\longrightarrow\neg xRy))$；

(3) $\forall x\forall y\forall z(x\in S\wedge y\in S\wedge z\in S\longrightarrow(xRy\wedge yRz\longrightarrow xRz))$，则称集合 S 是良序的.

上述条件(3)，叫做 R 对 S 是传递的. 条件(1)与(3)就给出了 R 对 S 的线性排序；而条件(2)是最小性条件，也就是对于 S 的任一子集合 S_1，S_1 都有关于 R 的最小元素. 蔡梅罗 1904 年证明的定理是说，任意集合 S 都是可以良序的. 后来人们发现这一定理也是和选择公理等价的. 也是选择公理的一种形式.

按照上述良序集合的条件，不难看出，任一序数是关于 $\in$ 的一良序集合. 并且，任一良序集合 S（实际上应写做 $\langle S, R\rangle$，其中 R 是良序 S 的那个关系）都对应到一序数 α. 亦即：有一个双射的函数 f，使得：

$$\forall x\forall y(x\in S\wedge y\in S\wedge xRy\longrightarrow f(x)\in f(y)\wedge f(x)\in\alpha\wedge f(y)\in\alpha).$$

这时，就称良序集合 $\langle S, R\rangle$ 与序数 α 是同构的，并且 f 就是

S 与 α 的同构映射.

序数是刻划良序集合的. 集合论序数是一极端重要的概念,可以说它是集合论的精髓. 还应注意的是,在早期集合论书中,序数并非作为特殊的集合进行定义的,而是作为良序集的序型引进的,那种定义有许多不方便的地方.

从良序的定义可直接看出: 任一序数都是由它前边的序数所组成, 这就是前节的概念. 一序数 α 的 β-前节, 是指: $\beta<\alpha$, 并且把这一 β-前节记为 $\mathrm{Seg}(\beta)$, 即:

$$\mathrm{Seg}(\beta):=\{x\mid \mathrm{On}(x)\wedge x<\beta\}.$$

显然, $\mathrm{Seg}(\beta)$ 也是一序数.

序数有许多有趣的性质,读者可以自己加以验证,比如:

(1) 每一不空的序数集合都有一个最小元素, 并且它的所有元素都可依照从小到大的次序排成一良序集合.

(2) 超穷归纳法: 一个关于序数的命题 $A(\alpha)$, 如果已知 $A(0)$ 正确,且由任一 $\beta<\alpha$ 时,所有 $A(\beta)$ 的正确性能够推导出 $A(\alpha)$ 的正确性, 这时我们就能断定对于每一序数 α, $A(\alpha)$ 都是正确的.

超穷归纳原则是很重要的,它不仅可用于证明定理,而且也可用于定义新的概念.

3. 基　　数

定义 8　一基数 β 是满足条件

$$\alpha<\beta\longrightarrow\overline{\overline{\alpha}}<\overline{\overline{\beta}}$$

的序数.

其中 $\overline{\overline{\alpha}}<\overline{\overline{\beta}}$ 是指 $\overline{\overline{\alpha}}\leqslant\overline{\overline{\beta}}$ 成立并且 $\overline{\overline{\alpha}}=\overline{\overline{\beta}}$ 不成立.

定理 3　ω 是一基数.

证明 设 $\alpha<\omega$，这时由 $\alpha\in\omega$ 可知 α 为一自然数. 由于 α 为有穷集合，ω 为无穷集合，显然 $\overline{\overline{\alpha}}<\overline{\overline{\omega}}$. ⊣

有时，把 ω 记作 ω_0.

定义 9 对于一集合 S，如果 S 与 ω 是一一对应的，则 S 叫做是可数的；如果有一内射 $f: \omega\longrightarrow S$，并且不存在双射 $\varphi: \omega\longrightarrow S$，则 S 叫做是不可数的.

定义 10 $\omega_1 := \{\alpha \mid On(\alpha)\wedge\overline{\overline{\alpha}}\leqslant\omega\}$.

因为 $\forall\alpha(On(\alpha)\wedge\alpha<\omega_1\longrightarrow\alpha\in\omega_1)$，所以 $On(\omega_1)$.

定理 4 ω_1 是不可数. 即又说明了序数 ω_1 也是一基数.

证明 假定 ω_1 可数. ω_1 为一序数，由定义 10，可知 $\omega_1\in\omega_1$，这与序数的良基性相矛盾. 这就证明了 ω_1 不可数. ⊣

注意：定理 4 是说 ω_1 作为基数也是大于 ω_0 的. 在不引起误解的情况下，我们仍用在序数中用过的小于符号 $<$，即 $\omega_0<\omega_1$. 作为序数，当然也有 $\omega<\omega_1$. 但是，序数间成立的小于次序，如 $2\omega<3\omega$，而他们的基数却是相等的，亦即都等于 ω，这时应当写成 $\overline{\overline{2\omega}}=\overline{\overline{3\omega}}=\omega$.

定义 11 对于任意的序数 α，假定基数 ω_α 已被定义，那么

$$\omega_{\alpha+1} := \{\beta \mid On(\beta)\wedge\overline{\overline{\beta}}\leqslant\omega_\alpha\};$$

当 λ 为任一极限序数时，并且，对于任意的序数 $\beta<\lambda$，基数 ω_β 已定义，那么

$$\omega_\lambda := \sup\{\omega_\beta \mid \beta<\lambda\}.$$

关于序数运用归纳法，我们可以证明：

定理 5 所有的无穷基数能够排列成：

$$\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_\omega,\ \cdots,\ \omega_\alpha,\ \cdots, \tag{3.1}$$

并且，这是依从小到大的顺序排列的，也就是说，对于任意的

序数 $\alpha<\beta$, 有 $\omega_\alpha<\omega_\beta$.

我们也可以把(3.1)写成:

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \cdots,\ \aleph_\omega,\ \cdots,\ \aleph_\alpha,\ \cdots, \tag{3.2}$$

而且,对于任意的序数 $\alpha<\beta$, 则有 $\aleph_\alpha<\aleph_\beta$.

这一定理的证明，当 β 为后继序数时，是类似于定理 4 的;而当 β 为极限序数时,由定义 11 也是不难的.

(3.1)即(3.2)也可以换一种定义方式，不过那要在建立了康托尔定理(参见本书第 48 页)之后.

4. 集合的基数

定义 12 任一集合 S 的基数 $\overline{\overline{S}}$, 是指与 S 对等的那个基数 $\aleph_\alpha$, 即 $\overline{\overline{S}}=\aleph_\alpha$.

集合的基数，是刻划一集合的大小(或度量)的一个精确的数学概念.

选择公理的形式 II. 对于任意的集合 S_1、S_2, 都有 $\overline{\overline{S}}_1\leqslant\overline{\overline{S}}_2$ 或者 $\overline{\overline{S}}_2\leqslant\overline{\overline{S}}_1$ 成立.（也就是说，任意两个集合，它们的基数都是可比较的.）

基数的可比较性(或者说:任意两个集合,都可用“一一对应”这一概念去比较它们的大小)，是康托尔在一百年前创立集合论时一个很基本的思想. 当时，人们并没有严格地陈述选择公理,后来才发现:康托尔的这一原则和选择公理是等价的. 并作为选择公理的等价形式之一进行了研究（参见 H. Rubin 与 J. Rubin 合著的 «Equivalents of the Axiom of Choice»(«选择公理之等价»)一书).

定义 11 中所定义的基数，也叫*开始序数*，形容成为基数的那些序数都是在和它本身有相同基数的那类序数中的第一

个序数，也就是最小的那个序数.

定义12中所给出的一集合的基数（有时也叫集合的势）的概念，是仿照冯·诺意曼的定义. 这和古典的、康托尔的定义有些不同. 在早期的书中常常采用后者，现在有些作者也仍然使用后者. 但是，使用冯·诺意曼的定义在处理问题时要方便得多，故此本书采用这一定义形式.

例如：由第29页的定理9、定理10可知，正整数集合的基数为ω_0，正整数的平方数集合基数也是ω_0.

又如，对于每一可数集合，它们的基数都是ω_0.

练　习　三

1. 列出下述集合：

(1) $2\cup 3$;　　(2) $2\cap 3$;

(3) 2×3;　　(4) 2×1;

(5) 1×2;　　(6) 0×1.

2. 给定集合S，它的并集合是指如下由概括原则定义的集合（并且记作$\bigcup S$）：

$$\bigcup S:=\{x\mid \exists y(y\in S\wedge x\in y)\}.$$

求下述集合的并集合：

(1) $S:=\{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\}$;

(2) $S:=\{\{0, 1\}, \{2, 3\}, 5, \{0, 2\}\}$;

(3) $S:=6$;

(4) $S:=6\cap 5$.

3. 验证 $\bigcup\omega=\omega$.

4. 设n为任一自然数，验证 $\bigcup n=n-1$.

5. 验证：

(1) 对于任意的极限序数α，$\bigcup\alpha=\alpha$;

(2) 对于任意的后继序数α，$\bigcup\alpha=\alpha-1$.

逻辑思考题

1. 设p、q为命题，命题只取“真”值或“假”值，而且二者只取其一，也必取其一. 我们以1表示“真”值，以0表示“假”值，这样，关于命题连接词的真假值，可列表如下（并称为“真值表”）：

p	q	$p\wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p\vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p\longrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p\longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

真值表中，取相同真值的二个命题，称为是等值的．例如

(1) p 与 $\neg\neg p$ 等值：

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
0	1	0
1	0	1

(2) $p\longrightarrow q$ 与 $\neg p\vee q$ 等值：

p	q	$p\longrightarrow q$	$\neg p$	$\neg p\vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

(3) $p\longrightarrow q$ 与 $\neg q\longrightarrow\neg p$ 等值：

p	q	$p\longrightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q\longrightarrow\neg p$
0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1

使用等值表，证明下述命题对是等值的：

(1) $p\longrightarrow q$ 与 $\neg(p\wedge\neg q)$；　(2) $p\vee q$ 与 $\neg(\neg p\wedge\neg q)$；

(3) $p\longrightarrow q$ 与 $(p\wedge\neg q)\longrightarrow\neg p$；　(4) $p\longrightarrow q$ 与 $(p\wedge\neg q)\longrightarrow q$；

(5) $p\vee q$ 与 $q\vee p$; (6) $q\wedge p$ 与 $p\wedge q$;

(7) $p\wedge(q\vee r)$ 与 $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$; (8) $p\vee(q\wedge r)$ 与 $(p\vee q)\wedge(p\vee r)$;

(9) p 与 $p\vee p$; (10) p 与 $p\wedge p$.

2. $\forall xA(x)$ 指所有的 x, 有 $A(x)$ 成立; $\exists xA(x)$ 指有些 x, 有 $A(x)$ 成立.

试证明: (1) $\forall xA(x)$ 与 $\neg\exists x\neg A(x)$ 等值;

(2) $\neg\forall xA(x)$ 与 $\exists x\neg A(x)$ 等值;

(3) $\neg\forall x\neg A(x)$ 与 $\exists xA(x)$ 等值;

(4) $\forall x\neg A(x)$ 与 $\neg\exists xA(x)$ 等值.

四、可数集合与不可数集合

我们已经知道, $\mathbf{N}$ 的基数是 $\aleph_0$, 而 $P(\mathbf{N})$ 的基数是什么呢? 为了回答这一问题, 我们首先对一些常见的集合的基数作出回答, 并证明一个一般性的定理: 对于任意集合 S, 它的幂集 $P(S)$ 的基数总是大于 $\overline{\overline{S}}$ 的. 这就是著名的康托尔定理. 由此, 显然有 $P(\mathbf{N})$ 的基数大于 $\aleph_0$ 的结论. 我们还要证明: $P(\mathbf{N})$ 与实数集合 $\mathbf{R}$ 的基数是相等的.

1. 一些可数集合

前已指出了一些集合的基数, 现在继续这一工作.

定理 1 自然数集合的任一无穷子集合都是可数的. 也就是说, 它们的基数都是 $\aleph_0$.

证明 设 S 是自然数集合的任一无穷子集合, 我们可以按自然数的从小到大的顺序逐一检查它们是否属于 S, 这就很自然地把集合 S 的所有元素依从小到大的顺序排列为

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots, \tag{4.1}$$

这就给出了集合 S 与 $\mathbf{N}$ 之间的一个双射函数 f, $f(a_n)=n$, $f: S \longrightarrow N$. ⊣

注意，运用定理 1，可以知道：偶数集合、奇数集合、素数集合等自然数的无穷子集合，它们的基数都是 $\aleph_0$.

定理 2 整数集合 $\mathbf{Z}$ 也是可数的．也就是说 $\overline{\overline{Z}}=\aleph_0$.

证明 我们可以把 $\mathbf{Z}$ 以下述方式重新进行编排：

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \cdots,\ n,\ -n,\ \cdots, \tag{4.2}$$

也就是说，我们构造了这样一个函数 f: $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=-1$, $f(3)=2$, $f(4)=-2$, 等等．可以看出，我们有：

$$f(n)=\begin{cases}-\varkappa, & \text{当有 } \varkappa \text{ 使得 } n=2\varkappa \text{ 时;}\\ \varkappa+1, & \text{当有 } \varkappa \text{ 使得 } n=2\varkappa+1 \text{ 时.}\end{cases}$$

因之，$f: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}$ 为一双射函数. ⊣

2. 有理数集合 Q 也是可数的

首先来证明下一定理：

定理 3 $\overline{\overline{\mathbf{Q}}}=\aleph_0$．也就是说，有理数集合 $\mathbf{Q}$ 能够和自然数集合建立一一对应.

证明 如图 14，构造双射函数 f: $\mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{N}$ 如下：在一半平面上，上边第一横排为 1 排，标以数 1，从上而下为 2 排，3 排，…，n 排，$n+1$ 排，等等，每排中间为 0 行，标以数 0，向右依次为 1 行，2 行，…，由 0 行向左依次为 -1 行，-2 行，-3 行，…．在 n 横排与 m 竖行相交的地方表示有理数 m/n，其中 m 可正可负．这样，下半平面的格子点上，就把所有有理数都枚举了．只是有些重复点需要去掉（如 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$ 等等表示同一数 $\frac{1}{2}$，这样我们的 f 只对第一出现的 $\frac{1}{2}$ 有定义，

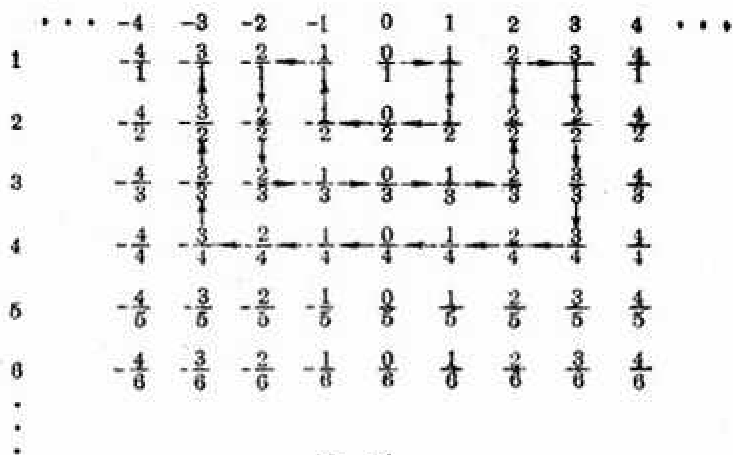


图 14

并且$f\left(\frac{1}{2}\right)=2$，不再定义$f\left(\frac{2}{4}\right)$了，或者说$f\left(\frac{2}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=2$）. 按照这一规则，我们的枚举是:

$$f(0)=0,$$

$$f(1)=1,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2,$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=3,$$

$$f(-1)=4,$$

$$f(-2)=f\left(-\frac{2}{1}\right)=5,$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right)=6,$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=7,$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=8,$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=9,$$

$$f(2)=10,$$
$$f(3)=11,$$
$$\vdots$$

显然．上述定义的函数 $f: \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{N}$ 是一双射函数，这就证明了定理3． ⊣

粗看起来，有理数集合似乎比自然数集合要多得多，前者是一稠密集合，亦即对任意两个有理数 $r_1<r_2$，总可找到第三个有理数 r_3（实际上有无穷多个有理数）使得 $r_1<r_3<r_2$；而后者是稀疏的，对任意两个自然数 $m_1<m_2$，至多有有穷个自然数 m，使得 $m_1<m<m_2$，当 $m_2=m_1+1$ 时，上述数 m 就不存在了．利用有序对与点的对应，$\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ 平面上的点是稠密的，而 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 平面上的点是很稀疏的格子点．但是，在进行了上述分析之后，它们中间存在着一一对应，也就是他们的数目是相等的．这一定理显示了集合论的惊人的结论和感人的吸引力．

3. 可数集合的一些主要性质

定理4 任一可数集合的无穷子集合，仍然是一可数集合．亦即：若 $\overline{\overline{S}}=\aleph_0$，$S_1\subset S$，且 S_1 无穷，则 $\overline{\overline{S}}_1=\aleph_0$．

证明 因 S 可数，即有双射函数 f，使 $f: \mathbf{N}\longrightarrow S$，故 $S=\{f(0), f(1), \cdots, f(n), \cdots\}$，可以把 S 改写成 $S=\{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$．因为 S_1 是 S 的无穷子集，故 $S_1=\{f(m_0), f(m_1), \cdots, f(m_n), \cdots\}$，或记作 $S_1=\{a_{m_0}, a_{m_1}, \cdots, a_{m_n}, \cdots\}$．这样，由图15建立双射函数 $g: \mathbf{N}\longrightarrow S_1$，这就证得了

$$\overline{\overline{S}}_1=\aleph_0.$$

⊣

$$\begin{array}{cccccc} 0, & 1, & 2, & \cdots, & n, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ a_0, & a_1, & a_2, & \cdots, & a_n, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ a_{m_0}, & a_{m_1}, & a_{m_2}, & \cdots, & a_{m_n}, & \cdots \end{array}$$

图 15

定理 5 一可数集合 S 或附加上一有穷集合，或删去其中的有穷个元素，结果仍为可数集合.

证明 我们仅证定理的第一部分，第二部分是类似的.

设 $S=\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$，现附加上的有穷集合的元素为 $b_0, b_2, \cdots, b_m$. 不妨假定 $b_i(0\leqslant i\leqslant m)$ 都与 S 中元素不相同，所得到的集合为 $S_1=\{b_0, b_1, \cdots, b_m, a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$. 设 f: $\mathbf{N}\longrightarrow S$ 为双射函数，定义 g: $\mathbf{N}\longrightarrow S_1$ 如下：

$$g(i)=\begin{cases} b_i, & \text{当 } 0\leqslant i\leqslant m, \\ a_{i-m-1}, & \text{当 } m+1\leqslant i \text{ 且 } i\in\omega. \end{cases}$$

显然，g 是 $\mathbf{N}$ 与 S_1 之间的一双射函数，这就证得了 S_1 为可数集合. ⊣

定理 6 二可数集合之并，还是一可数集合.

证明 设 $S_1=\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$,

$S_2=\{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$.

不妨假定 S_1 与 S_2 不交(亦即它们没相同的元素). 其并集合可作如下排列：

$$a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n, \cdots.$$

这就是说，当 f_1: $\mathbf{N}\longrightarrow S_1$, f_2: $\mathbf{N}\longrightarrow S_2$ 为二个双射函数时，我们定义 f 为

$$f(n)=\begin{cases} f_1(x), & \text{当有 } x\in\mathbf{N},\ n=2x; \\ f_2(x), & \text{当有 } x\in\mathbf{N},\ n=2x+1. \end{cases}$$

显然，$f: \mathbf{N} \longrightarrow S_1 \cup S_2$ 是一双射函数，这就证明了定理 6. ⊣

定理 7 可数无穷多个可数集合的并集合，仍然是一可数集合.

证明 不妨假定这些集合都是两两不交的，并且它们的元素为：

$$S_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1n}, \cdots\},$$
$$S_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots, a_{2n}, \cdots\},$$
$$S_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \cdots, a_{3n}, \cdots\},$$
$$\vdots$$

而 $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots$. 对 S 的元素作如下排列：

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \vdots & & & & \end{array} \qquad (4.3)$$

在上述元素的排列 (4.3) 中，由左上端开始，其每一斜线上的每一元素的两足码之和都相同，且依次为 2, 3, 4, 5, …，各斜线上元素的个数依次为 1, 2, 3, 4, …. 这样，(4.3) 依次排列为：

$$a_{11};\ a_{21},\ a_{12};\ a_{31},\ a_{22},\ a_{13};\ \cdots \qquad (4.4)$$

由 (4.4) 可以建立 S 与 $\mathbf{N}$ 的双射函数.

我们还可用另一方法来考察 S 的可数性. 为此，先定义自然数的一无穷子集合 T 如下：

$$T := \{x \mid \text{有 } n\in \mathbf{N},\ m\in \mathbf{N} \text{ 且 } n>1,\ m>1 \text{ 使得 } x=2^n\cdot 3^m\}.$$

显然，T 是一无穷集合，并且 T 中元素是由 n 与 m 唯一决定的.

对于任一 $x\in T$，我们令 $(x)_0$ 表示 x 的 2 的指数，$(x)_1$ 表示 x 的 3 的指数. 亦即 $x=2^{(x)_0}\cdot 3^{(x)_1}$. 我们定义 $f: T\longrightarrow S$ 如下：令 $f(x)=a_{(x)_0(x)_1}$. 由我们对 T 与 S 的规定，f 为一双射函数. 且因为 T 可数，所以 $\overline{\overline{S}}=\aleph_0$. ⊣

4. 康托尔定理

定理 8 对于任一集合 S，都有 $\overline{\overline{S}}<\overline{\overline{P(S)}}$.

证明 对于任一 $x\in S$，令 $f(x)=\{x\}$. 由于当 $x_1\neq x_2$ 时，有 $\{x_1\}\neq\{x_2\}$，即 $f(x_1)\neq f(x_2)$，所以 f 就是 $S\longrightarrow P(S)$ 的一内射函数. 因此 $\overline{\overline{S}}\leqslant\overline{\overline{P(S)}}$. 下面，我们来证明这个等号是不能成立的.

假定不然，即存在一双射函数 $\varphi: S\longrightarrow P(S)$. 对于任一 $x\in S$，$\varphi(x)\in P(S)$，即 $\varphi(x)\subset S$. 当然我们可以问这一 x 属于 $\varphi(x)$ 吗？一般说来，可能是 $x\in\varphi(x)$ 成立，也可能是 $x\notin\varphi(x)$ 成立. 令 S_0 为所有使得 $x\notin\varphi(x)$ 的那些元 x 所组成，亦即

$$S_0 := \{x \mid x\notin\varphi(x)\wedge x\in S\}. \tag{4.5}$$

显然 S_0 是 S 的一子集合. 因为 φ 是一双射函数，所以在 S 中必有一元素 y 使得 $S_0=\varphi(y)$. 因此，我们可以提出 $y\in S_0$ 是否成立这样一个问题. 按照通常逻辑的排中律，$y\in S_0$ 或者 $y\notin S_0$，二者必居其一.

若 $y\in S_0$，由 (4.5) 得到 $y\notin\varphi(y)$. 但是，由 y 的定义，$S_0=\varphi(y)$，所以 $y\notin S_0$；

若 $y\notin S_0$，由 $S_0=\varphi(y)$，得到 $y\notin\varphi(y)$，但是，由 (4.5)，$y\in S_0$.

这样，不管 y 是否属于 S_0，都要导出矛盾. 因此，这样的双射函数 φ 是不存在的，亦即证明了定理 8. ⊣

由康托尔的上述定理，立即可得下述定理：

定理 9 $\aleph_0<\overline{\overline{P(\mathbf{N})}}$.

康托尔定理在集合论的发展史上具有重要意义，它首先揭示了存在着不可数的集合，并且说明基数是无尽止的(对于任意给定一集合 S，总有基数比 S 的基数更大的集合存在). 康托尔定理还揭示了证明数学定理的一个重要方法——对角线方法(或对角过程). 为了进一步说明这一方法，下边我们来证明区间[0, 1]中一切实数所构成的集合是不可数的.

定理 10 集合[0, 1]是不可数的.

证明 假定[0, 1]是可数的，并且枚举它们的元素为 a_1，a_2，a_3，a_4，$\cdots$. 我们知道，在 0 与 1 之间的每一实数都可表示成形为 $0.p_1p_2p_3\cdots$ 的无穷小数†. 这样，序列：

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots \tag{4.6}$$

便可表示为：

$$\left.\begin{array}{ll} a_1: & 0.p_{11}p_{12}p_{13}p_{14}\cdots \\ a_2: & 0.p_{21}p_{22}p_{23}p_{24}\cdots \\ a_3: & 0.p_{31}p_{32}p_{33}p_{34}\cdots \\ a_4: & 0.p_{41}p_{42}p_{43}p_{44}\cdots \\ \vdots & \end{array}\right\} \tag{4.7}$$

现在构造一数 q，为形式 $0.q_1q_2q_3q_4\cdots$ 如下. 我们逐步检

† 对于有限小数的情形，均可写成以“9”为循环节的无穷循环小数形式，例如 0.3=0.2999⋯，0.87=0.86999⋯. 还可以有 1=0.999⋯. 当然，数 0 是个例外.

(4.7) 式的对角线上的数 p_{nn}，因为 $0\leqslant p_{nn}\leqslant 9$．若 $p_{nn}\neq 5$，令 $q_n=5$；若 $p_{nn}=5$，令 $q_n=4$．这样，就有 $4\leqslant q_n\leqslant 5$．并且 q 与(4.6)中的任一数都不相同．但 $q\in[0, 1]$，这说明(4.6)并未能枚举完$[0, 1]$中的数．所以$[0, 1]$是不可数的． ⊣

定义 我们把集合$[0,1]$的基数记作$\aleph$,亦即$\aleph:=\overline{\overline{[0,1]}}$．有时,也把$\aleph$ 记做 c．

定理 11 令 $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$, 且 $a<b$, 则 $[a, b]$，$[a, b)$，$(a, b]$，(a, b)的基数都是 $\aleph$．

证明 令 $f(x)=a+(b-a)x$, 显然 f 为 $[0, 1]\to[a, b]$ 的一双射函数，这就证明了 $[a, b]$ 的基数也是 $\aleph$．由于任一无限集合删去有限个点仍然与原来集合对等，从而知$[a, b)$、$(a, b]$、(a,b)的基数也都是 $\aleph$． ⊣

定理 12 对于任意的自然数 n，n 个基数为 $\aleph$ 的两两不相交的集合之并集合，其基数仍然是 $\aleph$．

证明 令这 n 个不交集合为 $S_1, S_2, \cdots, S_n$, $S=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n$．并且 $\overline{\overline{S_i}}=\aleph$, $1\leqslant i\leqslant n$．我们将半闭区间 $[0, 1)$ 用点 $a_0=0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n=1$ 分成 n 个半闭区间 $[a_{i-1}, a_i)$，$i=1, 2, \cdots, n$．每一个半闭区间的基数都是 $\aleph$，所以可以使$[a_{i-1}, a_i)$与 S_i 做成一一对应．又因$[0, 1)$为这些小半闭区间之并集合，所以 S 与$[0, 1)$成一一对应．定理得证． ⊣

定理 13 全体实数所组成的集合 $\mathbf{R}$ 的基数也是 $\aleph$．

证明 因为 $\mathbf{R}$ 可分割成可数无穷个半闭区间之并集合，例如

$$\mathbf{R}=\bigcup_{k\in\omega}\{[k-1, k)\cup[-k, -k+1)\}, \qquad (4.7)$$

而区间$(0, 1]$可依下列方式分割成可数无穷个半闭区间之并集合：

$$(0,1]=\bigcup_{k\in\omega}\left\{\left(\frac{1}{k+2},\frac{1}{k+1}\right]\right\}. \tag{4.8}$$

由定理 12, $\left(\frac{1}{k+2},\frac{1}{k+1}\right]$与$[k-1,k)\cup[k,-k+1)$是对等的，所以，由 (4.8) 与(4.7)可以获得 $\mathbf{R}$ 与半闭区间 $(0,1]$对等，即 $\overline{\overline{\mathbf{R}}}=\aleph$. ⊣

练 习 四

1. 对于 $n>0$, 令

$$F_n:=\{y\,|\,y \text{ 为多项式 } a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ \text{其中 } a_0,a_1,\cdots,a_n \text{ 都是有理数, 且 } a_n\neq 0\},$$

求 F_n 的基数?

2. 令 $\mathbf{C}$ 表示复数的集合，即

$$\mathbf{C}:=\{x\,|\,x \text{ 为任一形式 } a+bi,\ \text{其中 } a,b\in\mathbf{R} \text{ 且 } i \text{ 为} \sqrt{-1}\}.$$

求 C 的基数?

3. 令 $P_0:=\{f\,|\,f$ 为一函数, $\mathrm{dom}(f)\subset\mathbf{N}$ 且 $\mathrm{ran}(f)\subset\{0,1\}\}$, 求集合 P_0 与集合 $P(\mathbf{N})$的基数的关系.

4. F'_n 是把第 1 题中的 "有理数" 改为 "实数" 所获得的 n 元实多项式的集合，求 F'_n 的基数?

逻辑思考题

1. 利用上节逻辑思考题 1 中给出的真值表，证明：若 $p\vee q$, $\neg p\vee r$ 取真值，则有 $q\vee r$ 取真值。

2. $(p\vee q)\vee r$ 与 $p\vee(q\vee r)$ 等值.

3. p 取真值，则 $p\vee q$ 也取真值.

五、康 托 尔 猜 想

现在进一步讨论 $P(\mathbf{N})$的基数. 我们已经知道，当 S 为有穷集合时，比如 S 有 n 个元素，$P(S)$ 的元素恰有 2^n 个. 亦即，

$$\overline{\overline{P(S)}}=2^{\overline{\overline{S}}}. \tag{5.1}$$

仿照(5.1)，当 S 为无穷集合时，也把 $\overline{\overline{P(S)}}$ 记做 $2^{\overline{\overline{S}}}$，这样，$\overline{\overline{P(\mathbf{N})}}$ 就是 $2^{\aleph_0}$。并且，由第 49 页定理 9，即有：

$$\aleph_0<2^{\aleph_0}. \tag{5.2}$$

1. $\aleph_1\leqslant 2^{\aleph_0}$

在第 39 页，把所有无穷基数依照从小到大的顺序排列为(3.2)。其中，$\aleph_1$ 是大于 $\aleph_0$ 的最小的基数。但是，(5.2)断定 $2^{\aleph_0}$ 大于 $\aleph_0$，所以，自然地，就有†：

$$\aleph_1\leqslant 2^{\aleph_0}. \tag{5.3}$$

我们知道，$\aleph_1$ 是所有可数序数（包括有穷序数，即自然数）所组成的集合，而 $2^{\aleph_0}$ 为自然数集合 $\mathbf{N}$ 的所有子集合所组成的那个集合的基数，这两者之间的关系值得弄清楚。也就是说，(5.3)的等号是否成立呢？这是一个重要的问题。

另一方面，既然(5.3)是小于等于，那么也有可能是小于号成立，在这种情况下就有 $\aleph_2\leqslant 2^{\aleph_0}$ 成立，那么 $2^{\aleph_0}$ 究竟在(3.2)中那个位置上呢？这是一百年前集合论研究中提出的一个重要问题。

2. 连续统假设

1882 年，集合论的奠基者康托尔曾宣布，他已经证明了 $2^{\aleph_0}=\aleph_1$。并说即将公布证明。但是，直至康托尔(1845 年 3 月

---

† 在有的集合论著作中，由康托尔定理，先断定(5.2)，然后定义 $\aleph_1$ 为大于 $\aleph_0$ 的最小的那个基数(存在性是由康托尔定理保证的)，这自然就有(5.3)了。

3 日～1918 年 1 月 6 日）去世，也没有能公布他的证明．大概在 1882 年后，他发现了他原来的证明有错误而未公布．这位贡献卓著的伟大数学家在临死前，对他未能解决这一问题还表示了遗憾．

1900 年，著名数学家希尔伯脱（Hilbet, D）在巴黎数学大会上的著名演讲《数学问题》中列举了二十三个未解决的数学问题，向本世纪数学家挑战，其中第一个就是"$2^{\aleph_0}$ 等于 $\aleph_1$ 吗？" 1925 年，希尔伯脱曾提出一个大纲，他认为按照他的大纲是可以证明 $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ 的．但是，后来发现他的大纲也是错误的，因为他用到了自然数集合的每一子集合都是递归集合，但是，后来．递归函数理论（数理逻辑的一个分支）对算法的概念逐步精确化，在本世纪三十年发现：并非自然数集合的一切子集合都是递归的，递归子集合只有 $\aleph_0$ 个，大量的子集合是不递归的．

3. $\overline{\overline{\mathbf{R}}}=\overline{\overline{P(\mathbf{N})}}$，亦即 $\aleph=2^{\aleph_0}$

我们已经讨论了 $2^{\aleph_0}>\aleph_0$，并且由第 49 页定理 10 知道 $\aleph>\aleph_0$．那么，$\aleph$ 与 $2^{\aleph_0}$ 的关系是什么呢？它们是否相等呢？

定理 集合 $[0, 1]$ 与集合 $P(\mathbf{N})$ 是对等的，亦即 $\aleph=2^{\aleph_0}$．

证明 首先，我们把每一数都用二进制法表示出来．对每一小数 $x\in[0, 1]$，按照二进制数的表示法，x 可表成形式

$$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots, \tag{5.4}$$

其中 a_i 为 0 或 1．并且，他们的表示法是唯一的．数 0 表示为 0.000…，小数点后边全是 0，数 1 表示为 0.111…，小数点后边全是 1．这样，对于一个数 x，可以看作是一个自然数的函数 f，使得 $f(n)=a_n$．这时，(5.4) 就可以写成：

$$0.f(1)f(2)f(3)\cdots f(n)\cdots. \tag{5.5}$$

同时，由函数 f 可以如下决定 $\mathbf{N}$ 的一子集合 S：

$$S=\{n \mid f(n)=1 \text{ 且 } n\in\mathbf{N}\}. \tag{5.6}$$

这样，数 0 对应空集合 $\varnothing$，数 1 对应集合 $\mathbf{N}$. 反之，每一集合 $S\subset\mathbf{N}$，都可以找到一个函数 f（也称 f 为 S 的特征函数）如下：

$$f(n)=\begin{cases}1, & \text{当 } n\in S \text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } n\notin S \text{ 时.}\end{cases} \tag{5.7}$$

对于这样的函数 f，可由(5.5)定义一个二进制数 $x\in[0,1]$. 这就建立了区间 $[0,1]$ 与 $P(\mathbf{N})$ 之间的一个一一对应，也就是给出了 $[0,1]$ 与 $P(\mathbf{N})$ 的一个双射函数. 从而完成了定理的证明. ⊣

这一定理说明：自然数集 $\mathbf{N}$ 有多少子集合的问题，就是区间 $[0,1]$ 上有多少实数的问题，结合第 50 页定理 13，也就是实数有多少的问题，或直线上点有多少的问题. 所以，这个问题就称之为连续统问题，英文为 Continuum Problem，连续统假设

$$2^{\aleph_0}=\aleph_1 \tag{5.8}$$

英文为 Continuum hypothesis，因此，(5.8)时常缩写为 CH.

而广义连续统假设，generalized Continuum hypothesis：

$$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1} \tag{5.9}$$

时常缩写为 GCH.

4. CH 的另一种陈述

假设(5.8)成立，而且我们知道在 $\aleph_0$ 与 $\aleph_1$ 之间没有其它基数，这样，在 $\aleph_0$ 与 $2^{\aleph_0}$ 之间就没其它基数了. 因此，CH 就

是说，实数集合 $\mathbf{R}$ 的任一无穷子集合，它的基数或者是可数的(亦即为 $\aleph_0$)，或者是 $2^{\aleph_0}$(亦即与 R 是一一对应的)．用公式来表示，就是：

$$\forall S(S\subset\mathbf{R}\longrightarrow\overline{\overline{S}}\leqslant\aleph_0\vee\overline{\overline{S}}=2^{\aleph_0}).$$

希尔伯脱在«数学问题»一文中说："康托尔关于这种集合的研究，提出了一个似乎很合理的定理，可是，尽管经过坚持不懈的努力，还没有人能够成功地证明这条定理．这一定理就是：每个由无穷多实数组成的系统，亦即实数集合 $\mathbf{R}$ 的无穷子集合(或点集合)，或者与自然数 1, 2, 3, … 组成的集合对等，或者与全体实数组成的集合对等，从而与连续统(即一条直线上的点的全体)相对等；因此，就对等关系而言，实数的无穷子集合只有两种：可数集合和连续统．"他接着又说："由这条定理，立即可以得出结论：连续统所具有的基数，紧接在可数集合基数之后；所以，这一定理的证明，将在可数集合与连续统之间架起一座新的桥梁．"希尔伯脱的这些话，充分地表现了他对连续统问题的高度评价，并且把他的长长的二十三问题表中，第一个就写上了："康托尔的连续统基数的问题"．

正因为连续统问题是数学中这样一个很基本的问题，或称为数学基础的问题，长期以来它一直是数理逻辑(特别是它的一个分支——公理集合论)的一个中心问题．近一百年来，虽然经过许多著名数学家的不懈的努力，取得了几项重大进展(这些进展，下面将给以较详细的通俗的说明)，但并未完全解决，至今仍然是数理逻辑的中心问题或中心问题之一，仍然有一些著名的数学家为寻求它的答案在不懈地努力着．

连续统问题的最终解决，将给数学带来重大影响．早在1934 年，谢宾斯基 (Sierpinski) 在他的«连续统假设»的专著

中，曾列举了十二个与CH在逻辑上等价的数学问题，并列举了CH的82个推论．近年来，人们在它的推论方面又作出了新的贡献．

连续统问题也是数学问题来源于几何、力学、物理等方面现实问题的一个范例．希尔伯脱在《数学问题》一文中曾严肃地批评一些数学家片面理解数学的严格性，他说："这种意见，有时为一些颇有名望的人所提倡，我认为是完全错误的．对于严格性要求的这种片面理解，会立即导致对一切从几何、力学和物理中提出的概念的排斥，从而堵塞来自外部世界的新的材料源泉，最终实际上必然会拒绝接受连续统和无理数的思想．这样一来，由于排斥几何学和数学物理，一条多么重要的、关系到数学生命的神经被切断了！"希尔伯脱的意见是十分清楚的，连续统问题是这样的清楚，它来自外部世界，纯数学需要从外部世界中吸取新材料，外部世界是数学的新的源泉．被一些人指责为脱离实际，所谓数学只是符号游戏的形式主义者希尔伯脱本人，原来是如此热情地坚持数学与外部世界的联系，把它提到"数学生命的神经"这样的高度．

练　习　五

1．在下述丰满的、无穷的二枝树中，A 点为树根，生长出二个树枝，左边的第一节点标上1，右边的第一节点标上数0，并且每一节点都长出二个树枝，其上一层的节点所标的数如图16依次为11，10，01，00，其规律就是从下一层往上长时，向左的把下层枝点的数尾填上1，而向右长的把下层枝点的数尾再填上0，以此类推，并求证：

(1) 令每一通路对应一二进制小数，依照此通路上所标的0与1的无穷序列前边加上"0."，如通路11001… 现在变为小数0.11001…，说明此树恰好表达[0, 1]的二进制数．

(2) 依证明第53页的定理时所使用的方法，证明这一无穷、丰满的二枝树的通路与N的子集合是一一对应的．

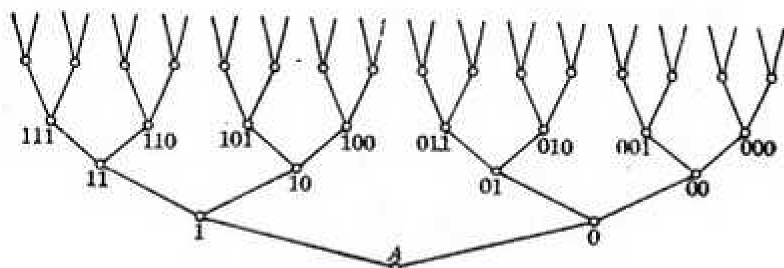


图 16

2. 由上题(1)证明的 [0, 1] 中数的二进制数的表示法，用对角线方法证明[0, 1]中的元是不可数的.

3. 求由自然数为系数的多项式集合的基数.

逻辑思考题

1. 论证 $\forall x A(x) \longrightarrow \exists x A(x)$ 永远成立.

2. 举例说明 $\exists x A(x)$ 推不出 $\forall x A(x)$.

3. 论证 $\exists x A(x) \longrightarrow B$ 与 $\forall x(A(x) \longrightarrow B)$ 等值，其中 x 不在 B 中出现.

4. 论证 $\forall x(B \longrightarrow A(x))$ 与 $B \longrightarrow \forall x A(x)$ 等值，其中 x 不在 B 中出现.

六、集合论悖论

康托尔所揭示的对角线方法，是一个影响深广的重要方法．数理逻辑中的不可证明性、不可判定性结果，都和这一方法有直接的或间接的联系.

罗素把对角线方法用于集合论本身，并获得了惊人的结果，促使集合论的深入发展，影响也是深远的．下边详细陈述罗素悖论、康托尔悖论，前者的目的之一是进一步显示对角线方法的作用，正确地理解这一方法，后者的目的在于要说明：问题出在“所有集合组成的集合”这一概念，下一节介绍的 ZF 集合论系统正是排除了这一概念，并且是沿着一个正确

的方向所获得的进展．至于理发师的悖论只是为了使我们的论证通俗化，趣味化，并没多大现实意义．

1．理发师的悖论

所谓悖论，是指这样一个命题 A，由 A 出发，可以找到一语句 B，然后，若假定 B 真，就可推得 $\neg B$ 真，亦即可推导出 B 假；若假定 $\neg B$ 真，即 B 假，又可推导出 B 真．

比如，人们所说的理发师的悖论，是指这样一个命题："李庄有一理发师，并规定这位理发师给而且只给李庄所有那些不给自己理发的人理发．"现在人们可以问："那位理发师的头发由谁给他理呢？"

若假定这个理发师的头发是他自己理的，那么按规定他只给那些不给自己理发的人理发，所以，可以推导出他不能为他自己理发；若假定他的头发是别人给理的，亦即他不给他自己理发，按规定这位理发师应该去给他自己理发．所以，不管怎样，不管这位理发师的头发是由谁给理的，都必然要推导出相反的命题来．

2．罗素悖论

在康托尔集合论中有没有悖论呢？在上世纪末，虽然有些数学家反对康托尔集合论中研究无穷集合这样的对象，对他的无穷推理过程表示怀疑，但又找不出毛病来．整个数学已经建立在严谨的集合论上了，因此，庞加莱 1900 年在巴黎召开的数学大会上高兴地宣称："现在，我们能够说完全严格性已经达到了"．但是，事隔二年，1902 年，罗素在集合论中

发现了一个悖论．使用我们的符号，他构造了这样一个集合：

$$T := \{x \mid x \notin x\},$$

也就是说，T 是由所有那些不属于自己的那些集合所组成，任一集合 x，如果有 $x\notin x$ 成立，那么这个 x 就是 T 的元，反之，T 中每一元 x 都有这种性质，亦即若 $x\in T$，就有 $x\notin x$．现在我们问：集合 T 是否属于它自己呢？

若假定：$T\in T$，因为 T 的任一元素 x 都有 $x\notin x$，现在 T 是 T 的元素，所以有 $T\notin T$，即由 $T\in T$ 可导致 $T\notin T$；反之，若假定：$T\notin T$，因为 T 由所有那些满足条件 $x\notin x$ 的 x 所组成，现在$T\notin T$，当然就在 T 中，即有 $T\in T$，即由 $T\notin T$ 可导致 $T\in T$．

其实，在罗素发现上述悖论之前，在集合论中已经发现了一些悖论，其中有康托尔自己在 1899 年发现的一个悖论．

3. 康托尔悖论

按照集合论的概括原则，任一性质都决定一集合，因此，可以假定 u 是由所有集合所组成的那个集合．对于 u，我们有它的幂集合 $P(u)$．现在问：集合 u 与集合 $P(u)$ 中，哪个的基数更大一些呢？

由此，我们必然获得两个相矛盾的命题．一方面，由康托尔定理，可知

$$\overline{\overline{u}}<\overline{\overline{P(u)}};$$

但是，另一方面，由于 u 是所有的集合所组成的集合，而 $P(u)$ 是 u 所有子集合所组成，因此，对于任意的 $x\in P(u)$，由 u 的定义，就有 $x\in u$，所以，$P(u)\subseteq u$，因此

$$\overline{\overline{P(u)}}\leqslant\overline{\overline{u}}.$$

这样,就得出了相互矛盾的结果,而它们又同时是集合论的定理,这就构成了集合论的一悖论.

康托尔悖论涉及到基数这样较为复杂的理论. 当时,康托尔希望对集合加以区分,借以排除他的悖论. 但是,他的悖论尚未排除,罗素悖论出现了,而且罗素悖论是由集合的基本概念着手,论证方法又和康托尔的著名定理中所用的方法(对角线方法)相类似,因此引起了某些著名数学家的极大的震动,原来相信数学基础已经奠定的人们也动摇了. 著名数学家韦尔(Weyl, H)说:"数学的最后基础和终极意义的问题仍旧没有解决,我们不知道沿着哪一个方向去寻找最后的解答,甚至也不知道我们是否能够希望找到一个最后的客观回答."于是,对数学基础问题出现了不同的派别.

罗素主张把数学还原为逻辑,并在这一方向上做了大量的工作. 他和怀特海合著了《数学原理》三卷大书(《Principia mathematica》)于1910~1913年相继出版. 把相当一部分数学给以逻辑地处理了. 但是,最后他发现无穷公理、选择公理无法还原为逻辑,从而宣告失败.

布劳沃(Brouwer, L. E. J.)主张数学"必须仔细标出哪些是直觉地可接受的论点和不可接受的论点,所以这个构造过程中便存在着数学的唯一可能的基础."布劳沃提出排中律不能太自由地使用它,对有穷集合可用排中律,对无穷集合只有找到一有效的方法去判定一元素是否属于它时(用现代的术语即递归集合时)才能允许使用排中律. 按照这一观点,相当一部分数学就应予以废除. 当然,他们突出地研究这一领域(可构造领域)的数学问题,那是十分有益的.

希尔伯脱不同意这些观点,他说:"禁止数学家使用排中

律，等于不许天文学家使用望远镜，不许拳击家使用拳头”。他提出了另外的方案，主要是形式化的方案。

练　习　六

1．一不空集合 S 的元素中还有没有公共部分呢？这常常是感兴趣的问题，现在我们给出这一新的运算：

$$\cap S := \{x \mid \forall y (y \in S \longrightarrow x \in y)\},$$

对于下述集合 S，求 $\cap S$。

(1) $S := \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\}$；

(2) $S := \{\{2, 4\}, \{2, 5\}\}$。

2．已知 A 为任一集合，求下列集合：

(1) $\cup\{1\}$；　(2) $\cup\{A\}$；　(3) $\cap\{1\}$；　(4) $\cap\{A\}$。

3．令 $S := \{\{2, 5\}, 4, \{4\}\}$，求 $\cap(\cup S - 4) = ?$

4．令 $S := \{\{1, 2\}, \{2, 0\}, \{1, 3\}\}$，寻求 $\cup S$，$\cap S$，$\cup\cup S$，$\cup\cap S$，$\cap\cup S$。

5．求 $\cap\cap\langle x, y\rangle$。

6．用 0，1，2 等表达下述集合：

$\varnothing$，$\cup\varnothing$，$P(\varnothing)$，$\cup\cup\varnothing$，$P(P(\varnothing))$，$\cup\cup\cup\varnothing$，$P(P(P(\varnothing)))$。

逻辑思考题

1．思索并论证下述命题是一悖论：

“命题 1：命题 1 是假的”。

2．思索并论证下述命题也是一悖论：

“命题 2：命题 2 是不可证明的。”

七、集合论的 ZF 公理系统

为了解决集合论的悖论，为了解决集合论中自身的问题，本世纪初，开始了集合论公理学的研究方向。1908 年蔡梅罗(Zermelo)首先发表了集合论的一个公理系统，后来经过弗兰克尔(Fraenkel)和斯科伦(Skolem)的改进，形成了今天著名的 Zermelo-Fraenkel 集合论公理系统，简称 ZF 系统。同年，

罗素也发表了他的一个集合论公理系统——类型论．以后，冯·诺依曼、贝尔奈斯、哥德尔等人也建立了其它类型的集合论公理系统．从现在的情况来看，最引人注意的是 ZF 系统．因此，这里简要地描述这一系统．

1. ZF 的形式语言

首先，要有一个描述 ZF 系统的形式语言，这个形式语言的主要成分是：

(1) 变元：x, y, z 等等．也可以附加下足标码．它们取值为集合．

(2) 类属符号 $\in$．当我们写 $x\in y$ 时，表示 x 是集合 y 的一个元素．

(3) 等号＝．当我们写 $x=y$ 时，表示集合 x 等于集合 y．

(4) 逻辑符号：$\neg$(非)，$\vee$(或)，$\wedge$(和)，$\longrightarrow$(蕴涵)，$\longleftrightarrow$(等值)，$\exists$(存在量词)，$\forall$(全称量词)，$\exists$、$\forall$ 统称量词．

(5) 技术性符号：(，)，分别称为左、右括号．

ZF 语言的形成规则是：

(1) 当 x、y 是变元时，$x\in y$ 和 $x=y$ 是合式公式，并称 x、y 在公式 $x\in y$, $x=y$ 中自由出现(合式公式简称为公式)．

(2) 当 A, B 为合式公式时，$A\vee B$, $A\wedge B$, $A\longrightarrow B$, $A\longleftrightarrow B$ 和 $\neg A$ 都叫做合式公式．新公式中的自由出现的变元和原来公式中出现的相同．

(3) 当 $A(x)$ 为公式，x 在 $A(x)$ 自由出现，这时，$\exists xA(x)$, $\forall xA(x)$ 也是公式，这时在结果公式中 x 为约束变元．其它变元是约束的还是自由的都与原来公式相同．

只有上述三条形成的是公式．当一个公式中没有变元是

自由出现时，就称它是一语句．其实，我们已经多次谈到了合式公式，并列举过许多公式．例如(1)一集合 S 的传递条件：$\forall x\forall y(x\in y\wedge y\in S\longrightarrow x\in S)$，(2)$S$ 的元素由 $\in$ 所顺序条件：$\forall x\forall y(x\in S\wedge y\in S\longrightarrow x\in y\vee x=y\vee y\in x)$．

我们已经陈述了 ZF 的形式语言，为简便起见，我们把它记作 $\mathscr{L}$．在 $\mathscr{L}$ 中并没有个体常项去表达已经知道的许多集合，如空集合 $\varnothing$；也没有函数符号，比如从 $\varnothing$ 到 $\{\varnothing\}$，从集合 S_1 和 S_2 到新的集合 $S_1\cup S_2$，$S_1\cap S_2$ 等等．实际上，这些常项与函数是要依据我们将要陈述的 ZF 公理去定义的．这些定义了的或被定义的集合，或集合的运算，又可以作为广义的形式对象参加到形式语言之中．因此，下边我们陈述一阶逻辑演算时，要把形式系统中的符号稍为扩充一下．

2．一阶谓词演算的公理系统和推理规则

我们把 $\mathscr{L}$ 扩充为 $\mathscr{L}_1$，只是增加个体常项符号和函数符号(它们都可以是任意基数多个)．并且在形成规则中作相应的补充：如增加项的形成规则如下 3 条，且只有这三条为项：

(1) 变元是项；

(2) 个体常项是项；

(3) 若 a_1，a_2，…，a_n 是项，f^n 是 n-目函数符号，则 $f^n(a_1, \cdots, a_n)$ 也是项．

我们在合式公式的形成规则中把变元改成项，此外还需要对一些记号作些说明，这主要是：用 $A_x[a]$ 表示在公式 A 中把 x 的每一自由出现都代入项 a，例如公式为 $x=x$，而项 a 为 $\langle t, u\rangle$，这时就得到 $\langle t, u\rangle=\langle t, u\rangle$，而当公式 A 为 $x=y$ 时，a 仍是 $\langle t, u\rangle$ 的情况下，$A_x[x]$ 就表示 $\langle t, u\rangle=y$．这样作代

入时，可能出现一些情况，使代入的结果和原来公式表达的意思完全不相同，比如，公式 $A(x)$ 为 $\exists y(x=\{y\})$ 时，表达集合 x 是一个单元集合，但是当我们取 a 为 y 时，$A_x[a]$ 就是 $\exists y(y=\{y\})$，这就不再表达 y 是单元集合这一事实了；又比如当公式 $A(x)$ 为 $\exists y(y\in\mathbf{N}\wedge x\in\mathbf{N}\wedge x=2y+1)$ 时，表达 x 是奇数，如果我们令 a 为 $y+1$ 时，公式 $A_x[a]$ 就成了 $\exists y(y\in\mathbf{N}\wedge y+1\in\mathbf{N}\wedge y+1=2y+1)$，这一公式并非表达 $y+1$ 是一奇数，而表达 $\mathbf{N}$ 中有 0 这个数了，因为只有 0 才能等于它自身的 2 倍．这两个例子都说明：在作代入时对 a 要作一定的要求．

对于项 a，如果在 a 中出现的每一个变元 y，形式为 $\exists yB$ 的部分内一定不含有在 A 中自由出现的 x，则称 a 对于公式 A 中自由出现的 x 是可代入的．上述两个公式中，$\exists yB$ 就是公式 A 自身，而且 a 对 x 在 A 中都是不可代入的．当然，如果取 a 中不含有变元 y，那么它们就都是可代入的了．不难看出，按照我们的规定，a 为 $y+1$，对于 x 在公式 $x\in\mathbf{N}\wedge y\in\mathbf{N}\wedge z=\langle x, y\rangle$ 来说是可代入的，因为此公式中不含有量词或没有形如 $\exists yB$ 的部分．当我们把公式 $A(x)$ 换为 $x\in\mathbf{N}\wedge z\in\mathbf{N}\wedge t\in\mathbf{N}\wedge u=\langle x, t\rangle\wedge\exists y(y=\langle t, z\rangle)$ 时，仍然是可代入的．今后，我们一旦写 $A_x[a]$，都假定 a 对 A 中 x 是可代入的．

在作了这些说明之后，现在给出一阶逻辑的逻辑公理：

(1) 命题公理模式，通常也叫排中律，即：对于任一语句 A，总有 $A\vee\neg A$ 为真（也就是 A 真或 $\neg A$ 真，没有其它情况出现）．这样，我们有：

命题公式模式：

$$A\vee\neg A,$$

其中 A 为任一公式．

(2) 代入公理模式:

$$A_x[a] \longrightarrow \exists x A,$$

其中 A 为任一公式.

(3) 恒等公理:

$$\forall x(x=x).$$

(4) 等式公理模式,指下述二个公式:

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y_1 \cdots \forall y_n (x_1=y_1 \wedge \cdots \wedge x_n=y_n \longrightarrow f^n_{(x_1,\cdots,x_n)} = f^n_{(y_1,\cdots,y_n)});$$

$$\forall x \forall y(x=y \wedge A(x) \longrightarrow A(y)),$$

其中 A 为任一公式, $A(y)$ 为把公式 $A(x)$ 中的 x 全部代入为 y 的结果.

逻辑公理和公理模式就是上述四条,一阶逻辑的推理规则为下述五条规则:

(1) 从 A 推出 $B \vee A$;

(2) 从 $A \vee A$ 推出 A;

(3) 从 $A \vee (B \vee C)$ 推出 $(A \vee B) \vee C$;

(4) 从 $A \vee B$ 和 $\neg A \vee C$ 推出 $B \vee C$;

(5) 如果 x 在 B 中是不自由的,则可从 $A \longrightarrow B$ 推出

$$\exists x A \longrightarrow B.$$

其中 A、B、C 都是公式,所谓 x 在 B 中是不自由的,是指: x 不能在 B 中自由出现,当然, x 在 B 中约束出现是允许的.

3. ZF 的公理系统

这一公理系统有下述九条非逻辑公理,现分述如下:

(1) 外延公理. 这是外延原则的重述,也就是说,一集合完全由它的元素所决定:

$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y].$$

(2) 正则公理，也叫基础公理．亦即

$$\forall x (\exists y (y \in x) \longrightarrow \exists y (y \in x \wedge \forall z (z \in y \longrightarrow \neg z \in x))).$$

(3) 空集合存在公理．亦即存在着一个集合 S，它没有元素，$\exists y \forall x (\neg x \in y)$．根据外延公理，这个没有元素的集合是唯一的，我们把它记作 $\varnothing$．

(4) 无序对集合公理．也就是说，任给两个集合 x、y，存在第三个集合 z，而 z 的元素恰好有两个，一个是 x，另一个是 y．用符号写出来就是：$\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \longleftrightarrow t = x \vee t = y)$．

(5) 并集合公理．也就是说，任给一集合 x，我们可把 x 的元素的元素汇集到一起，组成一个新的集合，用符号写出来的公式就是：

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \longleftrightarrow \exists t (z \in t \wedge t \in x)).$$

无序对公理保证了对于任意的集合 x、y，它们的无序对集合 $\{x, y\}$ 的合法性．而并集合公理是说，对于任意的集合 x，x 的并集合 $\cup x$ 是合法的，当我们取 x 为 $\{y, z\}$ 时，$\cup\{y, z\}$ 就是把集合 y 的元素和集合 z 的元素汇集到一起所得的集合，亦即 $\cup\{y, z\} = y \cup z$．

(6) 幂集合公理．也就是说：任意的集合 x，$P(x)$ 也是一集合，用公式表示就是：

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \longleftrightarrow z \subset x).$$

(7) 无穷集合存在公理．也就是说：存在一集合 x，它有无穷多个元素．用公式表示它就是：

$$\exists x (\exists y (y \in x) \wedge \forall z (z \in x \longrightarrow z \cup \{z\} \in x)).$$

其中 $\exists y (y \in x)$ 表示 x 不空，而 $z \cup \{z\}$ 表示集合 z 和它的单元集 $\{z\}$ 之并集合，由正则公理，显然有 $z \subset_{\neq} z \cup \{z\}$．这样，$\forall z (z \in x \longrightarrow z \cup \{z\} \in x)$ 就保证了集合 x 的无穷性质．

(8) 替换公理. 也就是说, 对于任意的公式 $A(x, y)$, 对于任意的集合 t, 当 $x\in t$ 时, 都有 y, 使得 $A(x, y)$ 成立的前提下, 就一定存在一集合 S, 使得对所有的 $x\in t$, 在集合 S 中都有一元素 y, 使得 $A(x, y)$ 成立. 也就是说, 由 $A(x, y)$ 所定义有序对的类的定义域在 t 中的时, 那么它的值域可限制在集合 S 之中, 用公式来表示就是:

$$\forall t(\forall x\in t\exists yA(x, y)\longrightarrow\exists S\forall x\in t\exists y\in SA(x, y)).$$

(9) 选择公理. 这一公理有许多等价形式, 我们已经陈述三种形式. 其实, 任取一种就可以了. 但是, 为了有助于读者加深理解, 我们这里再列举二种形式如下.

1904 年蔡梅罗的形式: 对任一不空集合 x, 都存在一个函数 f, 其定义域为 x 的所有的不空的元素, 取值分别在其作用的不空集合之中, 用符号来表示即为:

$$\forall x(x\neq\varnothing\longrightarrow\exists f\forall y(y\in x\wedge y\neq\varnothing\longrightarrow f(y)\in y)).$$

我们可以把这一公式叫做 AC (因为选择公理的英文为 The Axiom of Choice).

1906 年罗素的形式: 对于不空集合的不交集合 x, 存在一集合 C, 它恰好由 x 中每一集合的一个元素所组成. 用符号来表示即为

$$\forall x(\forall y(y\in x\longrightarrow y\neq\varnothing)\wedge\forall y\forall z(y\in x\wedge z\in x\longrightarrow y\cap x$$
$$=\varnothing\longrightarrow\exists C\forall y(y\in x\longrightarrow\exists!t(t\in y\wedge t\in C)))).$$

其中 $\exists!tA(t)$ 是表示存在唯一的 t, 使得 $A(t)$ 成立. 用符号来表示即为:

$$\exists!t(t\in y\wedge t\in C):=\exists t(t\in y\wedge t\in C\wedge$$
$$\forall z(z\in y\wedge z\in C\longrightarrow z=t)).$$

注意: 这九条公理中, 有六条公理 (即空集合存在公理, 无序对公理, 并集合公理, 幂集合公理, 无穷集合存在公理和

替换公理模式）都是对概括原则的具体化．试图通过这六条公理，把概括原则中那些对集合论运算、集合存在性等合理的内容全部保存下来，而又舍去那些引起悖论的副作用．这六条公理，连同选择公理，构成了 ZF 公理中关于集合的存在性公理．其余二条（外延公理和正则公理）是对于集合的刻划，或者说对集合作的限制．外延公理是说：一集合由它的元素唯一决定．一组元素决定一个集合，而不是多个集合．例如 $\{0, 1, 2\}$ 只决定一个集合，而不能由 $\{0, 1, 2\}$ 决定多个集合．正则公理是说：一集合的元素都具有某种最小性质，目的在于排除具有 $x\in x$ 这种性质的集合 x，集合和它的元素具有某种层次关系．因此，这一公理也叫基础公理或限制公理．

替换公理模式可以推得一种重要的模式，常常称为子集合公理模式，或分离公理模式，这就是：对于任一 ZF 公式 $A(x)$，都有：

$$\forall t\exists y\forall z(z\in y\longleftrightarrow z\in t\wedge A(z)).$$

也就是说，把集合 t 的那些满足性质 $A(z)$ 的所有的元素 z 汇集在一起形成集合 y．蔡梅罗 1908 陈述的公理系统就没有替换公理，而是列举了子集合公理，虽然当时有些不清楚的概念，什么是一性质未能说清楚．这一公理模式和概括原则不同的地方是满足性质 A 的元素又是 t 的元素．这后一条件也是很重要的，不是任一性质都决定一集合，而是要包含在某一集合之中；也不是任一集合的部分都是一集合，而还要为某一性质所表达．这二条缺一不可，除非你用其它公理来决定某一集合的存在性．

只有子集合公理模式连同其它公理不能推替换公理，从而有些重要集合没有替换公理就不能获得；后来根据弗兰克尔的意见，把它换成了替换公理．因此，人们称这一公理系统

为蔡梅罗-弗兰克尔系统，简记为ZF系统．并且常以ZF表示公理(1)～(8)，当包含公理(9)时，就记做ZFC.

4. 关于ZFC的定理和协调性问题

对于ZF语言中的一公式或一语句A，如果它是ZFC的一公理或一逻辑公理；或从逻辑公理与ZFC公理出发，经使用推理规则(1)～(5)在有穷步内可推得A，则A称为ZFC中的一定理，并记做ZFC$\vdash\!\!-$$A$.†

在上述一阶逻辑基础上，人们使用ZFC公理推演了(或发展了)康托尔集合论中所有的定理，如象我们前面已经列举的37条定理，全可以在ZF系统中加以证明，当然所有的概念也都可以在ZF系统中建立起来，否则也无法证明有关定理了．并且，集合论中出现的所有悖论都避免了．如罗素悖论中的$T=\{x|x\notin x\}$，由于找不到一集合把T给包起来，无法证明T是一集合，因此，T是否属于T这种问题就无法加以陈述了．又比如康托尔悖论，由于无法证明存在一集合u，它以所有集合为元素，所以康托尔的问题也就不存在了．出现悖论的原因在于把T、u作为一集合进行处理．现代集合论文献中，都把它们称为类或真类，任一公式$A(x)$，$\{x|A(x)\}$都是一类，当它能够包含在某一集合内时，它就成了一集合，否则就是一真类，因为"x是一序数"，"x是一基数"都可用公式来表示，所以$On=\{x|x$是一序数"$\}$，$Ca=\{x|x$是一基数$\}$都是一类，并且可以证明它们都真类．"x是一集合"可以用一永真公式$x=x$表示，因此，全域$V=\{x|x=x\}$也是一类，并且也是一真类.

† ZFC$\vdash\!\!-$$A$意指由ZFC公理推导出$A$，其中"$\vdash\!\!-$"为元数学符号.

集合论的已知悖论在 ZF 系统中避免了，是否就没有新的悖论出现了呢？这是不能保证的．正如庞加莱说的："我们围住了一群羊，但是羊棚里或许已经有狼了"．人们用公理系统围住了一群集合，但是这个系统内或许已经有悖论了．于是，希尔伯脱提出在形式系统内证明它的协调性这一问题．但是，1931 年哥德尔证明了：任何一个足够丰富的系统（在其中能表算术的系统），如果此系统是协调的，那么它的协调性在此系统内是不可证明的．当然，ZF 很丰富，它的协调性显然在 ZF 系统内是不可证明的．于是，只能这样提出问题：如果 ZF 系统是协调的，又有些什么结论呢？现代数理逻辑研究结果表明，如果 ZF 系统协调，那么就有一个模型（或称为数学结构），满足 ZF 的所有公理，即 ZFC 在其中都是真的（当然逻辑公理和规则在其中也都成立）．由于序数、空集合、幂集合都可以在 ZF 系统中定义，并且能够证明 ZF 的全域可以如下定义：

$$V_0=\varnothing,$$

$$V_{\alpha+1}=P(V_\alpha),$$

$$V_\lambda=\bigcup_{\alpha<\lambda}V_\alpha,$$

$$V=\bigcup_{\alpha\in On}V_\alpha.$$

满足 $x\in V_\alpha$ 成立的最小 α，称为集合 x 的秩，记做 $\text{rank}(x)$．由于我们在前边表达一集合、关系、函数、内射、满射、双射、序数、基数等等都是用公式进行的，因此，那些概念、定理全可直接搬到 ZF 系统内，并进一步搬到它的模型 V 中来．在此就不另一一作了，读者如果把这些当作练习来做，那是很好的．

练 习 七

1. 令 f 是一函数，S 是任一给定的集合，符号 $f\upharpoonright S$ 指函数 f 的定义域限制在 $\mathrm{dom}(f)\cap S$ 上所得到的函数。例如：$f=\{\langle 0,10\rangle,\langle 1,11\rangle,\langle 2,12\rangle,\langle 3,13\rangle,\langle 4,14\rangle\}$，取 S 为 2，这时 $f\upharpoonright 2$ 就是 $\{\langle 0,10\rangle,\langle 1,11\rangle\}$。而 $f\upharpoonright 3=\{\langle 0,11\rangle,\langle 1,11\rangle,\langle 2,12\rangle\}$。一般地，$f\upharpoonright S:=f\cap(S\times \mathrm{ran}(f))$。当 S 为空集合 $\varnothing$ 时，即 $f\upharpoonright\varnothing$ 为不能建立任何对应的空函数。据上述概念，求下列各题：

(1) $f:=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,9\rangle,\langle 4,16\rangle,\langle 5,25\rangle,\langle 6,36\rangle,\langle 7,49\rangle,\langle 8,64\rangle,\langle 9,81\rangle\}$，

$$g:=\{\langle x,x^2\rangle\mid x\in N\},$$

求：$S\upharpoonright 3$，$f\upharpoonright 5$，并验证 $f=g\upharpoonright 10$。

(2) 对(1)中给出的 f、g，验证：

$$f\upharpoonright 3=g\upharpoonright 3;\quad f\upharpoonright 5=g\upharpoonright 5;$$

$$f\upharpoonright 7=g\upharpoonright 7;\quad f\upharpoonright 9=g\upharpoonright 9.$$

2. 给出下述双射函数：(1) $f{:}1\longrightarrow 1$，(2) $2\times 3\longrightarrow 6$，(3) $6\longrightarrow 2\times 3$。

3. 证明：$\langle P(S),\subset_+\rangle$ 为一偏序，其中 S 为任一集合，$\subset_+$ 为集合的严格包含关系。

4. 试给出一双射函数 $f{:}\,\mathbf{N}\times\mathbf{N}\longrightarrow\mathbf{N}$。

5. 试在 ZFC 内证明定理 1～16。

6. 在 ZFC 内给出序数的定义。

7. 在 ZFC 内给出基数的定义。

逻辑思考题

1. $A\longrightarrow(A\longrightarrow B)\models\!\!\dashv A\longrightarrow B$。

2. $(A\longrightarrow B)\longrightarrow C\models\!\!\dashv B\longrightarrow C$。

3. $\neg(A\wedge B)\models\!\!\dashv A\longrightarrow\neg B$。

4. $\exists x\forall y A(x,y)\models\!\!\dashv\forall y\exists x A(x,y)$。

5. $\forall x A(x)\vee\forall x B(x)\models\!\!\dashv\forall x(A(x)\vee B(x))$。

6. 一公式若为形式（$A(x_1,\cdots,x_n)$ 中无量词出现）

$$Q_1x_1\cdots Q_nxA(x_1,\cdots,x_n)\qquad(*)$$

其中 $Q_ix_i=\exists x_i$ 或 $\forall x_i(i=1,2,\cdots,n)$，就称 $(*)$ 为一前束范式。本节给出的 ZFC 公理中，哪些为前束范式？哪些不是前束范式？不是前束范式的公式，能否化成与它等值的前束范式？

八、连续统假设对 ZFC 的相对协调性结果

1. 关于 CH 的基本结果

我们已经指出，集合论的已有的定理在 ZFC 中都可以证明，特别是我们已经列举的 37 条定理都是 ZFC 的定理，比如康托尔定理就可以写成：

$$ZFC \vdash \forall x(\bar{\bar{x}} < \overline{\overline{P(x)}}).$$

现在的问题是：连续统假设是否是 ZFC 中一条定理？或者反过来，连续统假设的否定式是否是 ZFC 的一条定理？亦即 $ZFC \vdash CH$ 成立吗？或 $ZFC \vdash \neg CH$ 成立吗？

1938 年，哥德尔证明了：如果 ZFC 是协调的，则 ZFC 推不出 $\neg$CH，亦即当 ZFC 协调时，有

$$ZFC \nvdash \neg CH. \tag{8.1}$$

其中"$\nvdash$"意指不可能推出.

1963 年，科恩证明了：ZFC 推不出来 CH，亦即若 ZFC 协调，则有

$$ZFC \nvdash CH. \tag{8.2}$$

对上述结果，还应说明："如果 ZFC 协调"是指"ZFC 有一模型"，而"ZFC 推导不出来 $\neg$CH"是指"有一个模型，在其中 ZFC+CH 都是真的."（这里用到了哥德尔 1930 年证明的一阶谓词演算的完全性定理：对于任意的公式序列 Γ 和

一公式 A，如果在使 Γ 成立的每一模型中 A 都一定成立，则 $\Gamma\vdash\!\!\!\!\!\!—— A$. 这定理的证明已超出了本书的范围.）这样，(8.1)就是说，如果 ZFC 有一模型 V，那么就可找到 ZFC+CH 的一模型. 而(8.2)是说，如果 ZFC 有一模型，那么就可以找到 ZFC+ ﹁CH 的一个模型. 不过，事实上哥德尔和科恩的结果还要更强一些，更丰富一些. 并且，哥德尔采用的是内模型方法，而科恩用的是外模型方法. 关于科恩的方法，我们在下节再作介绍.

2. 哥德尔的主要方法

哥德尔首先假定 ZF 协调，因此有一个模型 V（可以称为集合的全域，亦即所有的集合都是 V 的元素，正如我们在上节中所指出的那样）. 然后在 V 中挖出一块，当然也就剔除了一部分，使保存下来的那部分集合刚好又组成了一个论域，使得 ZF 在其中成立，CH 在其中成立，并且也得到了 AC 在其中成立. 这样，不仅证明了 CH 对 ZF 的相对协调性，也证明 AC 对 ZF 的相对协调性，从而也就证明 CH 对 ZFC 的相对协调性. 哥德尔把这个新构造出的域，叫做可构成的模型，其中的集合叫做可构成集合(Constructible set). 哥德尔怎样实现他的构造过程呢？简单说，他是利用他给出的八个基本函数，并对序数迭代运算，而逐步构造的. 这里，一是八个基本运算的选择并分析它们的性质；二是对序数进行分割，使得能够清楚地知道，在什么情况下进行那种运算，在什么情况下汇集已构造出的所有集合为一个集合；三是构造出可构造集合的域 L，并且证明 ZFC+CH 在 L 中成立. 这里，我们只能简要地介绍一下前二步.

3. 八个基本运算

哥德尔的八个基本运算是从两个已知集合 x, y 获得新的集合 z 的运算，它们是：

$F_1(x, y) := \{x, y\}$;

$F_2(x, y) := \{z_1 |$ 有 r, s 使得 $z_1 = \langle r, s\rangle$ 且 $z_1 \in x$ 并且 $r \in s\}$;

注意：$F_2(x, y)$ 和 y 无关，即 z_1 与 y 无关，只依赖于 x，并且只是把 x 中所有的具有性质 $r \in s$ 的有序对 $\langle r, s\rangle$ 汇集在一起形成 $F_2(x, y)$ 的值，这个值只是依赖 x 的元素.

$F_3(x, y) := x - y$;

$F_4(x, y) := \{\langle r, s\rangle | \langle r, s\rangle \in x \wedge s \in y\}$;

$F_5(x, y) := \{s | s \in x \wedge \exists r(\langle r, s\rangle \in y\}$;

$F_6(x, y) := \{\langle r, s\rangle | \langle r, s\rangle \in x \wedge \langle s, r\rangle \in y\}$;

$F_7(x, y) := \{\langle r, s, t\rangle | \langle r, s, t\rangle \in x \wedge \langle r, t, s\rangle \in y\}$;

$F_8(x, y) := \{\langle r, s, t\rangle | \langle r, s, t\rangle \in x \wedge \langle t, r, s\rangle \in y\}$.

其中，三元组 $\langle r, s, t\rangle := \langle r, \langle s, t\rangle\rangle$. 按这种方法，还可归纳地定义任意的 n 数组.

交集合是通过 $F_3(x, y)$ 直接定义的，这是因为

$$x \cap y = x - (x - y).$$

显然，当 $i = 2, 3, \cdots, 8$ 时，都有 $F_i(x, y) \subset x$. 而且，它们的特点都是：对 x 的元素作分析，并与 y 的元素作对比，就能获得它们的值. 它们都具有直谓的性质，具有在构造过程中的良好性质. 比如，我们已经指出过 $F_2(x, y)$ 的性质，任给 x 的一元素 z_1，我们首先看 z_1 是否一有序对：若不是，则 $z_1 \notin F_2(x, y)$；若是一有序对，我们看它的第一个元素 r 是否

属于它的第二个元素 s；若不是，同样 z_1 不在 $F(x, y)$ 中，若有 $r\in s$，那样就有 $z_1\in F_1(x, y)$ 了．$F_3(x, y)$ 是很显然的，只需检查 x 中的元素是否也属于 y 就够了．$F_4(x, y)$ 的元素是 x 中的所有有序对并且这一有序对的第二元素在 y 中．$F_5(x, y)$ 是 x 的元素同时又是 y 的元素中那些有序对的第二元素的汇合．换句话说，我们在第二节讲到关系时，曾定义一关系 R 的定义域 $\mathrm{dom}(R)$，值域 $\mathrm{ran}(R)$，我们现在把那一定义进行推广，使对任意集合（不一定是关系时）R 时，$\mathrm{dom}(R)$，$\mathrm{ran}(R)$ 都有定义，推广如下：

$$\mathrm{dom}(R) := \{x \mid 有\ y,\ 使得\ \langle x, y\rangle \in R\},$$

$$\mathrm{ran}(R) := \{y \mid \exists x(\langle x, y\rangle \in R)\}.$$

这样，$F_5(x, y) := x\cap \mathrm{ran}(y)$．

$F_6 \sim F_8$，都是很明显的，比如 $F_6(x, y)$ 就是把 x 的元素为有序对的，求一下逆（即由有序对 $\langle r, s\rangle$ 变到有序对 $\langle s, r\rangle$），看它是否在 y 中即可．而这种考察过程是确定的，没有不透明之处．在集合论中，有些运算并非如此，比如，任给一集 x，求它的幂集 $P(x)$ 的过程就不是这样清楚，要寻求 x 的所有子集合，不仅在 x 中找，还要考察任意的集合 y，看 y 的元素是否都在 x 中，这就失去了上述良好性质，由 x 到 $P(x)$ 有许多不透明的地方．这也正好说明连续统问题是一个难度很大的问题．哥德尔使用这种具有良好性质的运算获得的模型，正好使得在模型内作幂集合时消除了它的不透明性质．这一点十分重要．

4. 序数的配对函数和 L 的构造

在图 14 中，是把那些定义有理数的整数对与自然数建立

一一对应，我们现在要把这种对应推广到序数中去.

首先考察自然数对，也就是要把这种自然数的有序对进行排序. 对于 $\langle x_1, y_1\rangle\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, $\langle x_2, y_2\rangle\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，我们定义 $\langle x_1, y_1\rangle$ 先于 $\langle x_2, y_2\rangle$ 当且仅当 $\max\{x_1, y_1\}<\max\{x_2, y_2\}$ 并且当 $\max\{x_1, y_1\}=\max\{x_2, y_2\}$ 时 $y_1<y_2$ 或 $y_1=y_2$ 且 $x_1<x_2$. 这样就把自然数的有序对或平面上自然数的格子点与自然数建立了一一对应，亦即 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 与 $\mathbf{N}$ 建立了一个双射函数，这个函数 $J(x, y)$ 可以定义如下：

$$J(x, y)=\begin{cases}\sum\limits_{i<\max(x,y)}(2i+1)+y, & \text{当 } y<x \text{ 时;}\\ \sum\limits_{i<\max(x,y)}(2i+1)+x+y, & \text{当 } x\leqslant y \text{ 时.}\end{cases}$$

不难算出这个函数的前若干个数值：

$J(0, 0)=0$; $J(1, 0)=1$, $J(0, 1)=2$, $J(1, 1)=3$;
$J(2, 0)=4$, $J(2, 1)=5$, $J(0,2)=6$, $J(1, 2)=7$,
$J(2, 2)=8$; $J(3, 0)=9$, $J(3, 1)=10$, $J(3, 2)=11$,
$J(0, 3)=12$, $J(1,3)=13$, $J(2,3)=14$, $J(3, 3)=15$.

因为 J 为 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}\longrightarrow\mathbf{N}$ 双射，所以有函数 K_1、K_2 使得 $K_1(J(x, y))=x$, $K_2(J(x, y))=y$. 也就是说，任给一自然数 z，都有 $K_1(z)=x$, $K_2(z)=y$, 使得 $J(x, y)=J(K_1(z), K_2(z))=z$. 故称为配对函数.

我们把这种配对函数推广至序数上来，第一步是建立 $On\times On$ 的良序，也就是在序数平面上建立点的先后次序. 对任意序数 α_1, α_2, β_1, β_2, $\langle\alpha_1, \beta_1\rangle$ 先于 $\langle\alpha_2, \beta_2\rangle$ 并记作 $\langle\alpha_1, \beta_1\rangle R\langle\alpha_2, \beta_2\rangle$ 定义如下：

定义 1 $\langle\alpha_1, \beta_1\rangle R\langle\alpha_2, \beta_2\rangle:=\max\{\alpha_1, \beta_1\}<\max\{\alpha_2, \beta_2\}$ 或者 $(\max\{\alpha_1, \beta_1\}=\max\{\alpha_2, \beta_2\}\wedge(\beta_1<\beta_2\vee(\beta_1=\beta_2\wedge\alpha_1<\alpha_2)))$.

其中 $\max\{\alpha, \beta\}$ 指 α 与 β 中的较大者.

上述定义把整个平面 $On\times On$ 都排了次序，仿 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的情形，就把任意的序数对 $\langle\alpha, \beta\rangle$ 配之以序数 γ 了，并记作函数 $J'(\alpha, \beta)=\gamma$，并且存在序数函数 K'_1 与 K'_2，使得

$$K'_1(J'(\alpha, \beta))=\alpha, \quad K'_2(J'(\alpha, \beta))=\beta.$$

不仅把 $On\times On$ 进行排序建立配对函数，我们还要把 $9\times On\times On$ 进行排序，建立相应的配对函数.

定义 2 $i, j<9\longrightarrow(\langle i, \alpha_1, \beta_1\rangle$先于$\langle j, \alpha_2, \beta_2\rangle:=\langle\alpha_1, \beta_1\rangle R\langle\alpha_2, \beta_2\rangle$ 或者 $\langle\alpha_1, \beta_1\rangle=\langle\alpha_2, \beta_2\rangle\wedge i<j)$.

这种排序法是很直观、很自然的，三元组的顺序是先看后边二个元组成的有序对，依它们的顺序来决定三元组的顺序，当后边的有序对相等时，就依三元组的第一元从小到大进行排序了，首先是 0，然后依次 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 直至 8 为最后一个，这时又重新考察三元组的后二个元所组成的有序对. 仿前边，我们也可以定义三元的配对函数 J，使得任意的三元组 $\langle i, \alpha, \beta\rangle$ 都对应一序数 γ，即有 $J(i, \alpha, \beta)=\gamma$，并且存在序数函数 N, K_1, K_2，使得:

$$J(i, \alpha, \beta)\geqslant\max\{\alpha, \beta\},$$
$$N(J(i, \alpha, \beta))=i,$$
$$K_1(J(i, \alpha, \beta))=\alpha,$$
$$K_2(J(i, \alpha, \beta))=\beta.$$

这些简单的函数有许多有趣的性质，并且对于下边构造模型 L 有着极为重要的作用，读者应尽力弄清它们. 为简便起见，我们令

$$J_i(\alpha, \beta):=J(i, \alpha, \beta), \quad i=0, 1, \cdots, 8.$$

这样，我们就获得了 $J_0, J_1, \cdots, J_8$ 这样九个函数. 显然

$ran(J_i)$都是一些序数的类，并且这九个类是互不相交的，它们的并就正好是序数类 On. 还可以证明：对于每一序数 β，开始序数 ω_β 都在 $ran(J_0)$ 中. 现在我们用超穷归纳法来定义 On 上的一函数 F 如下：

定义 3 $F(0):=\varnothing$,

$\alpha\in ran(J_0)\longrightarrow F(\alpha):=ran(F\restriction\alpha)$.

$\alpha\in ran(J_1)\longrightarrow F(\alpha):=F_1(F(K_1(\alpha)), F(K_2(\alpha)))$.

………

$\alpha\in ran(J_8)\longrightarrow F(\alpha):=F_8(F(K_1(\alpha)), F(K_2(\alpha)))$.

其中 $F\restriction\alpha$ 指 F 在序数 α 时所获得那个函数，$ran(F\restriction\alpha)$ 为函数 $F\restriction\alpha$ 的值域. 实际上，定义 3 的 F 并非我们在第二节意义下的函数，因为现在它的定义域、值域都不是集合. 然而，我们把 F 限在任一序数 α 上时，所得 $F\restriction\alpha$ 都是第二节意义下的一函数. 这样定义的 F 的合法性也是能证明的.

定义 4 对于一集合 x；如果有一 $\alpha\in On$，使得 $x=F(\alpha)$，则称 x 是可构成的，并且

$$L:=\{x\mid\exists\alpha(\alpha\in On\wedge x=F(\alpha))\}.$$

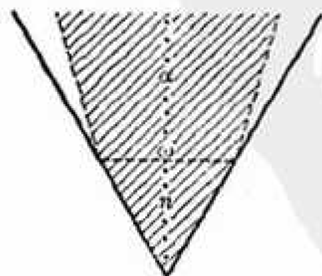


图 17

容易证明，任一有穷集合 x，都有 $x\in L$. 对于 L，以及 L 与 V 的关系的示意图，可参阅图 17.

哥德尔塑述了一条公理称为可构成性公理，即 $V=L$，可以用 ZF 公式来描述它，比如可以写成：$\forall x\exists\alpha(\alpha\in On\wedge x=F(\alpha))$. 哥德尔证明 $V=L$ 在 L 中成立，并且：

$$ZF \vdash V = L \longrightarrow AC \wedge GCH. \qquad (8.3)$$

其中 GCH 为广义连续统假设，当然也就有 CH 了．这就获了由 ZF 协调（有一模型），即可推导出 AC+CH+ZF 有模型，从而就完成了(8.1)的证明．

练 习 八

1．按本节第四段给出的 $On\times On\longrightarrow On$ 的对应，给出它们的双射对应，并求出 $J(0,\ \omega)$，$J(0,\ \omega_1)$ 的函数值．

2．证明：对任意自然数 n，$\mathrm{rank}(n)=n+1$．

3．证明：对任意序数 α，$\omega_\alpha\in\mathrm{ran}(J_0)$．

逻辑思考题

给出下述公式的前束范式：

1．$\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$．

2．$A\vee\exists xB(x)$．

3．$\forall xA(x)\longrightarrow B$，　x 不在 B 中出现．

4．$B\longrightarrow\forall xA(x)$，　x 不在 B 中出现．

5．$B\longrightarrow\exists xA(x)$，　x 不在 B 中出现．

6．$\exists xA(x)\longrightarrow B$，　x 不在 B 中出现．

九、连续统假设相对 ZFC 的独立性结果

现在我们来介绍科恩的独立性结果，就是他证明了(8.2)成立．具体地说，还应指出，在科恩构造的 ZFC 的模型中 CH 不成立，亦即 $2^{\aleph_0}\neq\aleph_1$．那么，$2^{\aleph_0}$ 等于什么呢？为了说明这些结果，还需介绍一些预备概念和结果．

Ⅰ 共尾序数与蔻尼定理

定义 1 $0<\alpha$, α 为一极限序数，我们说 α 的**共尾数** $cf(\alpha)$ 是指最小的序数 β，使得存在着一函数 $f:\beta\longrightarrow\alpha$，具有 $\sup\{f(\gamma)\mid\gamma<\beta\}=\alpha$.

显然 $cf(\alpha)\leqslant\alpha$.

例如：$cf(\omega)=\omega$，$cf(\omega+\omega)=\omega$，$cf(\omega^2)=\omega$.

定义 2 对于一基数 ω_α，如果有 $cf(\omega_\alpha)=\omega_\alpha$，则称 ω_α 是**正则的**；如果 $cf(\omega_\alpha)<\omega_\alpha$，则称 ω_α 为**奇异的**.

例如：$cf(\omega_\omega)=\sup\{\omega_n\mid n\in\omega\}=\omega$.

定理 1 对于每一序数 α，都存在一序数 $\beta>\alpha$，使得 ω_β 是奇异的.

证明 令 $\beta=\alpha+\omega$，那么 $\omega_\beta=\omega_{\alpha+\omega}=\sup\{\omega_{\alpha+n}\mid n\in\omega\}$，显然，$cf(\omega_\beta)=\omega$. ⊣

定理 2 ω 是正则的.

证明 因为 $cf(\omega)=\omega$. ⊣

在第 35 页中，我们给出了序数的算术运算，读者应当注意：基数的算术运算和序数的算术运算有很大的不同，我们现在来定义基数的这种运算.

定义 3 令

$$\varkappa+\lambda:=\overline{\overline{(A\cup B)}},\quad 其中\ \varkappa=\overline{\overline{A}},\ \lambda=\overline{\overline{B}}\ 且\ A\cap B=\varnothing,$$

$$\varkappa\cdot\lambda:=\overline{\overline{(A\times B)}},\quad 其中\ \varkappa=\overline{\overline{A}},\ \lambda=\overline{\overline{B}},$$

定理 3 $\omega_\alpha^2=\omega_\alpha$. 从而有 $\omega_\alpha+\omega_\alpha=\omega_\alpha$.

证明 按第 76 页定义 1 中的关系 R 对 $On\times On$ 进行良序，并证明了 $\omega_\alpha\times\omega_\alpha$ 是 $On\times On$ 的一前节. 现证明 $\omega_\alpha\times\omega_\alpha$ 与 ω_α 是同构的. 假定不然，令 α_0 是使得 $\omega_{\alpha_0}\times\omega_{\alpha_0}$ 与 ω_{α_0} 不对

等的第一个序数(即最小的序数). 这样, ω_{α_0} 与 $\omega_{\alpha_0}\times\omega_{\alpha_0}$ 的一前节不同构, 比如前节为 $\langle\beta, \gamma\rangle\uparrow$(表示有序对 $\langle\beta, \gamma\rangle$ 前边的所有的有序对集合), 令 $\delta<\omega_{\alpha_0}$ 是使得 $\beta<\delta$ 且 $\gamma<\delta$, 所以就有 $\langle\beta, \gamma\rangle\uparrow\subset\delta\times\delta$. 这样, 我们有

$$\omega_{\alpha_0}\leqslant(\overline{\overline{\delta\times\delta}})=\omega_{\alpha_1}^2=\omega_{\alpha_1}, \quad (\alpha_1<\alpha_0)$$

其中 $\omega_{\alpha_1}^2=\omega_{\alpha_1}$ 是由假设得到的, 这就得到了:

$$\omega_{\alpha_0}\leqslant\omega_{\alpha_1}<\omega_{\alpha_0},$$

矛盾. 这就证明了无 ω_{α_0} 使得 $\omega_{\alpha_0}^2=\omega_{\alpha_0}$.

又因为 $\omega_\alpha\leqslant\omega_\alpha+\omega_\alpha\leqslant\omega_\alpha\times\omega_\alpha=\omega_\alpha$, 所以有 $\omega_\alpha+\omega_\alpha=\omega_\alpha$. ⊣

定理 4 $\omega_\alpha\cdot\omega_\beta=\omega_\alpha+\omega_\beta=\max\{\omega_\alpha, \omega_\beta\}$.

证明 不妨假定 $\omega_\alpha>\omega_\beta$. 因为这时有:

$$\omega_\alpha\leqslant\omega_\alpha+\omega_\beta\leqslant\omega_\alpha\times\omega_\beta=\omega_\alpha.$$ ⊣

定义 4 令 S_1, S_2 为任意集合, 定义

$$S_1^{S_2}:=\{f\,|\,f:S_2\longrightarrow S_1\};$$

$$\varkappa^\lambda:=(\overline{\overline{S_1^{S_2}}}), \text{其中 } \overline{\overline{S}}_1=\varkappa,\ \overline{\overline{S}}_2=\lambda.$$

由此定义, 显然有:

$$\overline{\overline{P(S)}}=2^{\overline{\overline{S}}},$$

$$\overline{\overline{P(N)}}=2^{\aleph_0}.$$

这样, 我们在前边的约定就有定义性的根据了.

定理 5 如果 $\alpha\leqslant\beta$, 则 $\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta}=2^{\aleph_\beta}$.

证明 $2^{\aleph_\beta}\leqslant\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta}=(\overline{\overline{\omega_\alpha{}^{\omega_\beta}}})\leqslant\overline{\overline{P(\omega_\beta\times\omega_\alpha)}}=2^{\aleph_\alpha\cdot\aleph_\beta}=2^{\aleph_\beta}$. ⊣

定义 5 集合 S_i, $i\in I$ 的志标簇的卡氏乘是

$$\prod_{i\in I}S_i=\{f\,|\,f:I\longrightarrow\bigcup_{i\in I}S \text{ 且 } i\in I \text{ 时 } f(i)\in S_i\}.$$

定义 6 基数 $\varkappa_i$, $i\in I$ 的志标簇的和与积是:

$$\sum_{i\in I} \varkappa_i = \overline{\overline{(\bigcup_{i\in I} x_i)}},$$

其中 $\overline{\overline{x_i}}=\varkappa_i$，对所有 $i\in I$；且 x_i 是两两不交的(即 $i\neq j$, $i\in I$, $j\in I$ 时，$x_i\cap x_j=\varnothing$)；

$$\prod_{i\in I} \varkappa_i = \overline{\overline{(\prod_{i\in I} x_i)}}，其中 \overline{\overline{x_i}}=\varkappa_i,\ i\in I.$$

定理 6 如果 $\varkappa_i<\lambda_i$，对于每一 $i\in I$，则

$$\sum_{i\in I} \varkappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i.$$

证明 (1) 先证存在内射函数 $f: \sum_{i\in I} S_i \longrightarrow \prod_{i\in I} T_i$，其中 $\varkappa_i=\overline{\overline{S_i}}$，$S_i$ 两两不交，$\lambda_i=\overline{\overline{T_i}}$，且 f 为 $x\in S_i$ 时，$f(x)=\langle t_i | i\in I$ 且 $t_i=x$ 并且 $t_j\notin S_j$ 当 $i\neq j$ 时$\rangle$.

(2) 再证不可能存在双射函数. 反证，假定 f 是 $\bigcup_{i\in I} S_i$ 与 $\prod_{i\in I} T_i$ 的双射函数，令 f_B 是 f 在 T_B 上的透影. 那么，对于每一 $i\in I$，f_i 不能够是 S_i 与 T_i 的双射. 选择 $x_i\in T_i$ 并且它不在 f_i 在 S_i 上的值域内，这样 $\prod_i x_i$ 就不在 f 的值域之内. ⊣

2. 蔻尼定理的结论

由定理 6，可以直接获得：

定理 7 $2^{\aleph_0}$ 不能是可数个更小基数的和.

证明 如果 $\varkappa_i<2^{\aleph_0}$，$i\in\omega$，那么由定理 6，

$$\sum_{i\in\omega} \varkappa_i < \prod_{i\in\omega} 2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}. \quad ⊣$$

由定理 7，即得：

定理 8 $2^{\omega_0}\neq\omega_\omega$.

证明 设 $\omega_\omega=\sum_{i\in\omega}\omega_i$，且 $2^{\omega_0}=\omega_\omega$，$\omega_i<\omega_\omega$，所以 $\omega_i<2^{\omega_0}$，由定理 7，就得 $\omega_\omega<2^{\omega_0}$ 矛盾. ⊣

我们将定理 8 推广至对任意与 ω 共尾的基数 ω_α，都不能有 $2^{\omega_0}=\omega_\alpha$.

蔻尼定理是 1905 年蔻尼 (König) 给出的，他没有指出 $2^{\aleph_0}$ 应等于什么，而是告诉我们 $2^{\aleph_0}$ 不能等于什么，是一种限制性的结果. 除了他对 $2^{\aleph_0}$ 作出的限制外，至今没有人提出新的限制. 科恩的结果是说，除蔻尼的限制外，其它任何情况，或任意的基数 $\aleph_\alpha$，只要它不与 ω 共尾，都有模型 N，使得在其中 $2^{\aleph_0}=\aleph_\alpha$.

在数学中，这类限制性的结果虽然并没有直接解决问题，但是它仍然很重要. 例如: $\sqrt{2}$ 不是有理数，$\sqrt{-1}$ 不是实数，在集合论中也有全域 V 不是一集合，On 也不是一集合，等等. 这些限制性的结果在数学中是有着极重要意义的. 而且，几十年来，对 $2^{\aleph_0}$ 的限制还只有蔻尼的限制，还提不出新的限制来，那更说明了它的重要意义.

3. 科恩的结果是如何实现的

在哥德尔的模型 L 中，ZF+AC+CH 都是真的，其条件是 ZF 是协调的. L 是一个不可数的模型，因为全域中的序数都在 L 中. 能否有一个可数模型 M，使得 ZF+AC+CH 在其中同时成立呢？在数理逻辑中有个著名的定理，叫做莱文海姆–斯科伦 (Löwenheim–skolem) 定理，这一定理是说：在一阶逻辑中，如果一公式集合 S 有一模型（不管它有多大的基数），那么它就有一个基数为 $\max\{\aleph_0, \overline{\overline{S}}\}$ 的模型. 这是数理逻辑的一条基本定理，其证明已超过本书范围，有兴趣的读者可参阅有关数理逻辑的基本教程. 利用这一定理，同时我们知道 ZF+AC+CH 作为语句的集合是可数的，因此

我们有一个满足 ZF+AC+CH 的可数模型 M．并且 M 还具有极小性质，也就是说，可以取 M 为 L 的一个可数的前节，即有一可数序数 α_0，使得

$$M=\operatorname{ran}(F\upharpoonright\alpha_0)$$

成立．在 M 中 ZFC 公理都是真的，CH 也是真的，也就是 $P(\mathbf{N})$ 亦即 $\mathbf{N}$ 的子集合的数目为 $\aleph_1$，$2^{\aleph_0}=\aleph_1$．这里的 $\aleph_1$ 已和 L 中的 $\aleph_1$ 不同了，因为在 L 中这里的 $\aleph_1$ 也是小于 α_0 的．严格说来，这里的基数 $\aleph_1$ 应标上 $\aleph_1^M$，$\aleph_\alpha^M$ 等．其实，它们都是些可数序数，不过在 M 中，M 作为 ZFC 的一个模型 $\aleph_\alpha^M$ 起到了全域中 $\aleph_\alpha$ 的作用罢了，由于从上下文中我们是谈论模型 M 的，因此也就不加上标码 M 了．因为 M 是一可数模型，所以在 M 中 $\mathbf{N}$ 的子集合的个数，我们从外边观察实际上只有可数多个，在 M 外当然还有许多或更多的 $\mathbf{N}$ 的子集合，能否把这些不在 M 中的 $\mathbf{N}$ 的子集合增加进去一些，变成一个新的模型 M'，使得在 M' 中 ZFC 成立而 $2^{\aleph_0}>\aleph_1$ 呢？当然，这种 $S\subset\mathbf{N}$，并非都可以增加进去，比如表达 α_0 的良序的集合就不能增加进去，否则所得到的 M' 就不再是 ZFC 的模型了．应当选择一些集合 $S\subset\mathbf{N}$，使得把它们增加到 M 中去，所获得的 M' 仍然是 ZFC 的模型，而增加的 S 是那样的多，以至于在 M' 中 $\mathbf{N}$ 的子集合的数目远远地超过 $\aleph_1$，甚至于对于每一 M 中的基数 $\aleph_\alpha$，只要 $cf(\aleph_\alpha)\neq\omega$，都有 M'，使得在 M' 中 $2^{\aleph_0}=\aleph_\alpha$．这种集合 $S\subset\mathbf{N}$ 如何挑选出来呢？科恩运用他创立的力迫法来实现他的要求．力迫概念是科恩建立的一种逻辑关系，按照这种逻辑关系，任给序数 $\tau>1$，都可找到 ω_τ 个 $\mathbf{N}$ 的子集合 $a_\delta(\delta<\omega_\tau)$，这些 a_δ 互不相同，并且都不在 M 中，把 a_δ 附加到 M 中获得新的 M' 模型，对于这样得到的 M'，科恩证明了这样一个定理：

定理 9 （科恩定理） 在 M' 中，当 τ 不与 ω 共尾时，即 $cf(\tau)\neq\omega$，有 $2^{\aleph_0}=\aleph_\tau$；当 $cf(\tau)=\omega$ 时，有 $2^{\aleph_0}=\aleph_{\tau+1}$.

科恩定理的证明已超出了本书的范围，有兴趣的读者可参阅科恩的专著《集合论与连续统假设》. 科恩利用力迫法还证明了：如果 ZF 协调，则 $ZF\nvdash AC$.

科恩的结果是重大的，他创立的方法——力迫法极为重要，人们运用这一方法已经证明了一大批数学命题的独立结论.

4. ZF 系统的不完全性

早在 1931 年，哥德尔曾在形式算术系统 P 内找到一个语句 A，证明：如果 P 协调，则有

$$P\nvdash A \quad 和 \quad P\nvdash \neg A \tag{9.1}$$

同时成立. 也就是说，令 $T:=\{B\mid P\vdash B\}$，T 为 P 的定理集合，令 $R:=\{B\mid P\vdash\neg B\}$，$R$ 为 P 中否定理的集合，令 S 为算术系统的语句集合. 这时 $T\cup R\subset_{+}S$，甚至，不管如何扩充 P，都有算术语句 A，使得 A 为不可判定的，亦即(9.1)成立(如图 18).

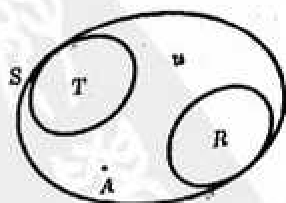


图 18

哥德尔 1931 年的结果也是重大的，对数学基础的研究产生了重大影响. 但是，哥德尔的语句 A 是依据 P 的公理系统和证明过程，并且利用递归函数的工具硬造出来的，显得很不自然. 现在，CH 对 ZFC 说来也是不可判定的，令 S 为 ZFC 的语句集合，并且 $T:=\{B\mid ZFC\vdash B\}$，$R:=\{B\mid ZFC\vdash\neg B\}$，上述已经证明了 CH 不在 T 中也不在 R 中. ZFC 是比 P 更强的一个系统，也就

是ZFC的语句集合比 P 的语句集合更大一些，定理也更多更强一些. 而CH是一个很现实的命题，这一点我们在第五节中已经谈到了，尽管如此，仍然有CH的不可判定性，而且到目前为止，$2^{\aleph_0}$ 的任意性还是很大的，它几乎(除去与 ω 共尾的基数)可以等于一切基数. 这对人们的认识是有重大意义的. 参见图19，其中 $u:=S-(T\cup R)$.

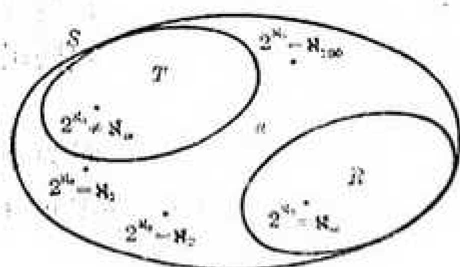


图 19

5. 连续统问题还是一大难题

公理化方法是把人们推理中一些推理的规则（明显的和隐含的）都加以明确化，合法化，使它具有逻辑格的地位，同时也把那些数学原则给以清晰化和合法化，把它们固定为逻辑格，并且排除那些隐含地使用的含混概念和错误概念. 然后弄清那些东西是从这些公理可以逻辑地推导出来的，那些命题是不可推导的，这是理论工作所不可缺少的步骤. 也是认识新结果的一种重要的方法. 试想一下，如果没有对集合论的公理学研究，不把它的基本内容给以公理化处理，那是无法获得象CH独立性、协调性的结果的. 从而也就没有六十年代以来的集合论的新的重大的进展.

在公理集合论中，如象连续统假设、选择公理这样的不可判定性的研究，称为集合论的元数学问题. 此外，公理集合论中还研究新的更强有力的新公理的问题. 这些研究也都是直接或间接地为解决连续统假设而进行的.

前边已经说过，连续统假设在数学上是重要的，十年前普拉台克(Platek, R)还发现，一个只谈到整数和实数的命题(它不能谈到实数的集合)A，如果 ZFC+CH$\vdash$$A$，那么就有 ZFC$\vdash$$A$；类似地，对于只谈到整数的命题 B，如果有 ZFC+$\neg$CH$\vdash$$B$，则有 ZFC$\vdash$$B$. 这就是说，可以把 CH 和$\neg$CH 作为推理中的工具，一个仅谈到整数和实数的命题，如果在 ZFC 的前提下，把 CH 作为一个工具，结合起来能够推得 A，则只有 ZFC 就可以推得 A 了. 这再次说明了 CH 的重要意义.

但是，到目前为止，人们还没有解决连续统问题，还不知道 $2^{\aleph_0}$ 究竟等于什么，它仍是数学中一大难题.

逻辑思考题

1. 如果公式 $\forall x\exists yA(x, y)$ 有一模型，证明它有一可数模型(在 AC 成立下作证明).

2. 试证本节列举的莱文海姆-斯科伦定理.

练习题答案

练习一 **3.** (1) $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$; (2) $P(P(\varnothing))=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; (3) $P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$; (4) $P(P(P(P(\varnothing))))=\{\varnothing, \varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}, \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$. **4.** (1) $\{-1, -2, -3, \cdots\}$; (2) **N**; (3) **N**; (4) **Q**; (5) 无理数集合. **5.** (3) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$. **6.** $A=B=D=F$, $C=E=G$.

练习二 **1.** $A\times B=\{\langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 0, 4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle\}$. **2.** $A\times B=\{\langle 0, 2\rangle, \langle 0, 4\rangle, \langle 0, 5\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 1, 5\rangle\}$，有如下关系：$\varnothing$; $\{\langle 0, 2\rangle\}$; $\{\langle 0, 5\rangle\}$; $\{\langle 0, 4\rangle\}$; $\{\langle 1, 2\rangle\}$; $\{\langle 1, 4\rangle\}$; $\{\langle 1,$

5⟩}; {⟨0, 2⟩, ⟨0, 4⟩}; {⟨0, 2⟩, ⟨0, 5⟩}, {⟨0, 2⟩, ⟨1, 2⟩}, {⟨0, 2⟩, ⟨1, 4⟩}, {⟨0, 2⟩, ⟨1, 5⟩}; {⟨0, 4⟩, ⟨0, 5⟩}; {⟨0, 4⟩, ⟨1, 2⟩}, {⟨0, 4⟩, ⟨1, 4⟩}; {⟨0, 4⟩, ⟨1, 5⟩}; {⟨0, 5⟩, ⟨1, 2⟩}; {⟨0, 5⟩, ⟨1, 4⟩}; {⟨0, 5⟩, ⟨1, 5⟩}; {⟨1, 2⟩, ⟨1, 4⟩}; {⟨1, 2⟩, ⟨1, 5⟩}; {⟨1, 4⟩, ⟨1, 5⟩}; {⟨0, 2⟩, ⟨0, 4⟩, ⟨0,5⟩}; {⟨0, 2⟩, ⟨0, 4⟩, ⟨1, 2⟩} 等等，总之 $A\times B$ 的每一子集合都是由 A 对 B 的一关系，总数为 2^6. **3.** $A\times B=\{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$, $B\times A=\{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle\}$, $\because\ \langle 2,1\rangle\in B\times A$, $\langle 2,1\rangle\notin A\times B$, $\therefore\ A\times B\neq B\times A$. **5.** 可以令 $f:=\{\langle 0,10\rangle, \langle 1,11\rangle, \langle 2,12\rangle, \langle 3,13\rangle, \langle 4,14\rangle, \langle 5,15\rangle, \langle 6,16\rangle\}$，亦即 $f(x):=x+10$，也可以由其它的定义。

练习三　**1.** (1) 3; (2) 2; (3) $\{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$; (4) $\{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle\}$; (5) $\{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle\}$; (6) $\varnothing$. **2.** (1) $\{a, b, c, d, e, f\}$; (2) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; (3) 4; (4) 3.

练习四　**1.** $\aleph_0$. **2.** $\aleph$. **3.** $\overline{\overline{P_0}}=\overline{\overline{P(\mathbf{N})}}$. **4.** $\overline{\overline{E_n^r}}=(\aleph)$.

练习五　**3.** $\aleph_0$.

练习六　**1.** (1) $\{a\}$; (2) $\{2\}$. **2.** (1) 1; (2) A; (3) 1; (4) A. **3.** 4. **4.** 分别为 4, 0, 3, 0, 0. **5.** x. **6.** 分别为0, 0, 1, 0, 2,0, {0,1,2,{1}}.

练习七　**1.** $f\restriction 3=\{\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,4\rangle\}$, $f\restriction 5=\{\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,9\rangle, \langle 4,16\rangle\}$. **2.** (1) $f=\{\langle 0,0\rangle\}$; (2) $f=\{\langle\langle 0,0\rangle,0\rangle, \langle\langle 0,1\rangle,1\rangle, \langle\langle 1,0\rangle,2\rangle, \langle\langle 1,1\rangle,3\rangle, \langle\langle 0,2\rangle,4\rangle\rangle, \langle\langle 1,2\rangle,5\rangle\}$; (3) 令 f 为(2) 定义的函数，f^{-1} 即为 $6\to 2\times 3$ 的一双射函数。对于(2)，(3)还可以有其它双射函数。

练习八　**1.** $J(\alpha,\beta):=\begin{cases}\sum\limits_{\lambda<\max(\alpha,\beta)}(2\lambda+1)+\beta, & \text{当 } \beta<\alpha \text{ 时;}\\ \sum\limits_{\lambda<\max(\alpha,\beta)}(2\lambda+1)+\alpha+\beta, & \text{当 } \alpha\leqslant\beta \text{ 时.}\end{cases}$

$J(0,\omega)=\omega, J(0,\omega_1)=\omega_1$.